Topologia II – Harjoitus 9 (viikko 13)

1. Onko Hausdorffin avaruudessa *kolmella* eri pisteellä aina erilliset ympäristöt?

2. Olkoot f ja g jatkuvia kuvauksia topologisesta avaruudesta X Hausdorffin avaruuteen Y. Todista:

   a) Joukko $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ on suljettu X:ssä.
   b) Jos $f|D = g|D$, jossa D on X:n tiheä osajoukko, niin $f = g$. (Väisälä 11:8)

3. Näytä, että T_4-ominaisuus periytyy suljettuihin osajoukkoihin: jos X on T_4-avaruus ja $A \Subset X$, niin A relatiivitopologiallaan varustettuna on T_4. (Vrt. Väisälä 11:12)

4. Varustetaan $\mathbb{R}$ "puoliavoimella topologialla" $\mathcal{T}_{\text{pa}}$ (ks. kirjan kohta 2.11.1). Osoita, että se on normaali avaruus. (Väisälä 11:14)

   [*Ohje*. Olkoot A ja B erillisiä suljettuja joukkoja. Valitse jokaisella $x \in A$ väli $[x, x + r(x)[$, joka ei kohtaa B:tä, ja tutki näiden välien yhdistettä sekä vastaavalla tavalla B:stä muodostettua joukkoa.]

5. Esitä jokin (mielellään mahdollisimman havainnollinen) todistus sille, että joukko $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(x_n) : x_n = 0 \text{ tai } 1 \text{ kaikilla } n \in \mathbb{N}\}$ on ylinumeroituva. Päättele, että luonnollisten lukujen joukon potenssijoukko $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{A : A \subset \mathbb{N}\}$ on ylinumeroituva.

   [*Ehdotus*. Vastaoletus ja diagonaaliargumentti.]

6. Todista kirjan lause 12.11: ominaisuudet N_1 ja N_2 periytyvät osajoukkoihin. (Väisälä 12:1)