Topologia II – Harjoitus 8 (viikko 12)

1. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita, että metriikan määräämä topologia $\mathcal{T}_d$ on sama kuin perheen $\{d_x : x \in X\}$ indusoima topologia, kun $d_x \colon X \to [0, \infty[$, $d_x(y) = d(x, y)$.

2. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Osoita, että jokainen suljettu joukko $F \subset X$ on ns. G_δ-joukko (eli voidaan lausua numeroituvana leikkauksena avoimista joukoista) ja että jokainen avoin joukko $U \subset X$ on ns. F_σ-joukko (eli voidaan lausua numeroituvana yhdisteenä suljetuista joukoista). (Väisälä 10:4)

   [*Apu.* Tarkastele esim. joukkoja $\{x \in X : d(x, F) < 1/n\}$. Muista komplementit.]

3. Perustele, että rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$ ei ole sellaista täydellistä metriikkaa, jonka indusoima topologia olisi tavallinen topologia. (Vertaa tehtävään 6 alla!) [*Taika.* Baire.]

4. Olkoon (X, d) metrinen avaruus. Todista, että se on täydellinen, jos ja vain jos seuraava ehto on voimassa: aina kun $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ ovat X:n suljettuja epätyhjiä osajoukkoja ja $\lim_{n\to\infty} d(A_n) \to 0$, niin $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$. Muista, että epätyhjän joukon A läpimitta on $d(A) = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$. (Väisälä 10:8)

5. Olkoon X epätyhjä joukko ja (Y, d) epätyhjä metrinen avaruus, jolle $d(Y) < \infty$. Kun $f, g \colon X \to Y$ ovat kuvauksia, määritellään $\rho(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$. Totea lyhyesti seuraavat seikat (pitäen lauseet 10.13 ja 10.15 tunnettuina):

   a) ρ on metriikka kaikkien kuvausten $f \colon X \to Y$ joukossa Y^X.
   b) Jonon (f_n) suppeneminen ρ:n suhteen tarkoittaa tasaista suppenemista (ks. 10.12).
   c) Avaruuden (Y^X, ρ) Cauchy-jonot ovat täsmälleen ne jonot, jotka toteuttavat lauseen 10.15 tasaisen Cauchy-ehdon.
   d) Jos (Y, d) on täydellinen, niin (Y^X, ρ) on täydellinen.
   e) Jos X on topologinen avaruus, niin joukko $C(X, Y) = \{f \colon X \to Y \mid f \text{ on jatkuva}\}$ on suljettu avaruudessa (Y^X, ρ). (Vrt. Väisälä 10:6 ja 10:7)

   [*Huom.* Oletus $d(Y) < \infty$ ei käytännössä merkitse rajoitusta, sillä tarvittaessa voimme aina korvata d:n metriikalla $d'(y_1, y_2) = \min\{1, d(y_1, y_2)\}$, joka antaa saman topologian ja samat Cauchy-jonot Y:ssä.]

6. Kirjoitetaan $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \ldots\}$ ja määritellään $f_n(x) = (x - q_n)^{-1}$ kaikilla reaaliluvuilla $x \neq q_n$ ja $n \in \mathbb{N}$. Kun $x, y \in \mathbb{J} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (irrationaalilukujen joukko), asetetaan

   $$\rho(x, y) = |x - y| + \max\Big\{\min\{1/n,\ |f_n(x) - f_n(y)|\} : n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

   Todista:

   a) ρ on $\mathbb{J}$:n metriikka.
   b) ρ:n indusoima topologia on $\mathbb{J}$:n tavallinen topologia.
   c) $(\mathbb{J}, \rho)$ on täydellinen.

   [*Ohje.* a-kohta riittänee käsitellä melko kevyesti. b-kohdassa lienee hyödyksi huomata, että kukin f_n on jatkuva tavallisen topologian suhteen.]

Huom. Perjantain harjoitusryhmä (klo 10–12 salissa C130) on vakiinnutettu, ja uudetkin osanottajat ovat siihen hyvin tervetulleita!