Topologia II – Harjoitus 7 (12. 3. 2012)

1. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ sekä $g\colon Y \to X$ jatkuvia kuvauksia siten, että $g \circ f = \mathrm{id}\colon X \to X$. Tällöin f:ää sanotaan g:n *sektioksi* ja g:tä f:n *retraktioksi*. Näytä, että f on upotus ja g samastuskuvaus. (Väisälä 8:10)

2. a) Olkoon $X = \prod_{j \in J} X_j$ jokin tuloavaruus ja $f = \mathrm{pr}_k\colon X \to X_k$ siihen liittyvä projektio, jossa $k \in J$ on kiinteä. Osoita, että f on samastuskuvaus. Mikä on f:ää vastaava ekvivalenssi R_f, ja mitä ovat sen ekvivalenssiluokat eli f:n säikeet (ks. kirjan kohta 9.9)?

   b) Piirrä a-kohtaa havainnollistava kuva siinä tapauksessa, että $X = \mathbb{R}^2$ ja $f = \mathrm{pr}_1$.

3. Määritellään $\mathbb{R}$:ssä ekvivalenssirelaatio $\sim$ asettamalla $x \sim y$ jos ja vain jos $y - x \in \mathbb{Q}$ eli $y \in x + \mathbb{Q} = \{x + q : q \in \mathbb{Q}\}$. Näytä, että tekijäavaruuden $\mathbb{R}/\!\sim$ tekijätopologia on minitopologia. (Väisälä 9:9) [*Vihje.* Jokainen ekvivalenssiluokka $x + \mathbb{Q}$ on tiheä $\mathbb{R}$:ssä.]

4. Olkoon $n \geq 1$ ja $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\bar{0}\}$ (”punkteerattu” $\mathbb{R}^{n+1}$). Kun $x \in X$, määritellään $p(x) = \{tx : 0 \neq t \in \mathbb{R}\}$. Tällöin $Y = \{p(x) : x \in X\}$ on X:n ositus. Näytä sitten, että tekijäavaruutena Y on homeomorfinen projektiivisen avaruuden P^n kanssa.

   [*Ohje.* Tarkastele tekijäkuvauksen eli kirjan terminologiassa ”projektion” p rajoittumaa $S^n \to Y$, jossa $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$. Lause 9.10.]

5. Olkoon $I = [0, 1]$. Avaruuden X *kartio* on tekijäavaruus $c(X) = (X \times I)/(X \times \{1\})$, joka saadaan tuloavaruudesta $X \times I$ ”luhistamalla” osajoukko $X \times \{1\}$ pisteeksi (ks. kirjan kohta 9.6). Todista: Kun $n \geq 1$, niin yksikköpallon $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ kartio $c(S^{n-1})$ on homeomorfinen suljetun yksikkökuulan $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$ kanssa. (Väisälä 9:6)

   [*Ohje.* Lause 9.10.]

6. [Edellisten harjoitusten 6. tehtävä korjatussa muodossa.]

   Olkoot X, Y ja Z topologisia avaruuksia ja $u\colon X \to Z$ sekä $v\colon Y \to Z$ jatkuvia kuvauksia. Todista, että $X \times Y$:n aliavaruudella

   $$S = \{(x, y) \in X \times Y : u(x) = v(y)\}$$

   ja rajoittumilla $p = \mathrm{pr}_1|S\colon S \to X$ sekä $q = \mathrm{pr}_2|S\colon S \to Y$ on seuraava universaalisuusominaisuus: Jos T on mielivaltainen topologinen avaruus ja $f\colon T \to X$ sekä $g\colon T \to Y$ ovat jatkuvia kuvauksia, joille $u \circ f = v \circ g$, niin on olemassa täsmälleen yksi jatkuva kuvaus $h\colon T \to S$, jolle $p \circ h = f$ ja $q \circ h = g$. [Kolmikkoa (S, p, q) sanotaan parin (u, v) *säietuloksi*.]

1. kurssikoe pidetään pe 2. 3. klo 13.00–15.00 Exactumin auditorioissa. Viimeinen koealueeseen kuuluva asia on tulotopologia (kirjan jakso 7) ja siihen liittyvät harjoitukset. Luettelo koealueeseen kuulumattomista kirjan kohdista on kurssin kotisivulla. Muista, että klo 10–12 harjoitusten paikalla pidetään ”viime hetken kyselytilaisuus” kokeeseen liittyen.

Luennot ja harjoitukset jatkuvat väliviikon jälkeen ma 12. 3.