Topologia II – Harjoitus 5 (viikko 8)

1. Perustele, että $\mathbb{R}$ ja $]0,1]$ (tavallisilla topologioilla varustettuina) eivät ole homeomorfiset. Voit käyttää hyväksi analyysin kursseilla opittuja asioita.

2. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ injektio. Osoita, että f on upotus jos ja vain jos X:n topologia on f:n Y:stä indusoima. (Väisälä 5:8)

3. Olkoot X ja Y topologisia avaruuksia ja $f\colon X \to Y$ kuvaus. Oletetaan, että $(A_j)_{j\in J}$ on X:n *lokaalisti äärellinen suljettu peite*:

   i) $A_j \Subset X$ jokaisella $j \in J$

   ii) $\bigcup_{j\in J} A_j = X$

   iii) jokaisella $x \in X$ on ympäristö U_x, jolle $U_x \cap A_j \neq \emptyset$ vain äärellisen monella $j \in J$.

   Osoita: jos rajoittuma $f|A_j$ on jatkuva jokaisella $j \in J$, niin f on jatkuva. (Vrt. lause 5.13.)

   [*Apu.* Luennolla todettiin, että jos (U_j) on jokin X:n *avoin peite* (ts. avoimista joukoista U_j koostuva peite) ja $f|U_j$ on jatkuva jokaisella j, niin f on jatkuva. Saat käyttää tätä tulosta apuna, mikäli olet varma, että osaat sen tarvittaessa todistaa.]

4. a) Oletetaan, että X:ssä on kuvausten $f_j\colon X \to Y_j$ $(j \in J)$ indusoima topologia, jossa Y_j:t ovat Hausdorffin avaruuksia ja J on epätyhjä indeksijoukko. Osoita, että X on Hausdorff jos ja vain jos jokaista kahta eri pistettä $x, y \in X$ kohti on olemassa $j \in J$ siten, että $f_j(x) \neq f_j(y)$. (Väisälä 6:4)

   b) Päättele, että erityisesti tuloavaruus $\prod_{j\in J} X_j$ on Hausdorff, jos jokainen X_j on Hausdorff.

5. Olkoon $X = \prod_{j\in J} X_j$ tuloavaruus ja $A_j \subset X_j$ jokaisella $j \in J$, jolloin $A = \prod_{j\in J} A_j$ on X:n osajoukko. Osoita, että $\overline{A} = \prod_{j\in J} \overline{A_j}$. (Väisälä 7:2)

6. Varustetaan $\mathbb{R}$ ”puoliavoimella topologialla” $\mathcal{T}_{\text{pa}}$ (ks. kirjan kohta 2.11.1) ja tarkastellaan tästä syntyvää tuloavaruutta $X = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   a) Millaiset (mahdollisimman ”yksinkertaiset”) joukot muodostavat X:n kannan?

   b) Todista, että laskeva suora $L = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ on X:n suljettu osajoukko. Onko se myös avoin? (Piirrä kuva!)

   c) Millainen topologia on L:n relatiivitopologia?