Topologia II – Harjoitus 4 (viikko 7)

1. Kokoelma
$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{]a, \infty[\, : a \in \mathbb{R}\}$$
on $\mathbb{R}$:n topologia. (Todista tämä siltä osin, kuin tunnet tarpeelliseksi!) Osoita, että jos X on topologinen avaruus ja $f\colon X \to \mathbb{R}$ on kuvaus, niin f on jatkuva topologian $\mathcal{T}$ suhteen jos ja vain jos se on *alaspäin puolijatkuva*: jokaista $x_0 \in X$ ja $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen x_0:n ympäristö U, että $f(x) > f(x_0) - \epsilon$ kaikilla $x \in U$. (Väisälä 1:4 ja 3:1)

2. Olkoon X topologinen avaruus. Osajoukon $A \subset X$ *karakteristinen funktio* $\chi_A\colon X \to \mathbb{R}$ määritellään asettamalla $\chi_A(x) = 1$ kaikilla $x \in A$ ja $\chi_A(x) = 0$ kaikilla $x \notin A$. Osoita, että ∂A on χ_A:n epäjatkuvuuskohtien joukko, ts. χ_A on jatkuva pisteessä $x \in X$ jos ja vain jos $x \notin \partial A$. (Väisälä 3:2)

3. Määritellään
$$f(t) = e^{t+it} = (e^t \cos t, e^t \sin t), \quad \text{kun } t \in \mathbb{R}.$$
Tason $\mathbb{R}^2$ käyrää $L = f\mathbb{R}$ kutsutaan *logaritmiseksi spiraaliksi* (piirrä kuva!). Osoita, että $f\colon \mathbb{R} \to L$ on homeomorfismi.

4. Todista oppikirjan lause 4.8, joka kuuluu seuraavasti: Olkoon X:ssä kuvauksen $f\colon X \to Y$ indusoima topologia. Jos $\mathcal{B}$ on Y:n kanta, niin $\{f^{-1}B : B \in \mathcal{B}\}$ on X:n kanta. Jos $\mathcal{A}$ on Y:n esikanta, niin $\{f^{-1}A : A \in \mathcal{A}\}$ on X:n esikanta. (Väisälä 4:1)

5. Olkoon $f\colon X \to Y$, jossa X on joukko ja $(Y, \mathcal{T}')$ topologinen avaruus. Luennolla näytettiin (ks. kirjan lause 4.6), että f:n indusoimalla X:n topologialla $\mathcal{T}$ on seuraava *universaalisuusominaisuus*:

   > Jos $(Z, \mathcal{T}'')$ on mielivaltainen topologinen avaruus ja $g\colon Z \to X$ on kuvaus, niin g on jatkuva täsmälleen silloin kun $f \circ g$ on jatkuva.

   Täydennä lauseen todistus osoittamalla, että $\mathcal{T}$ on *ainoa* X:n topologia, jolla on tämä ominaisuus. [*Ohje.* Valitse $Z = X$ ja $g = \mathrm{id}$ sekä Z:lle sopivia topologioita.]

6. Topologisen avaruuden X osajoukko A on *lokaalisti suljettu*, jos jokaisella pisteellä $a \in A$ on sellainen ympäristö U, että $A \cap U \Subset U$ (ts. $A \cap U$ on suljettu U:n relatiivitopologiassa). Todista:

   a) A on lokaalisti suljettu jos ja vain jos se on X:n avoimen ja suljetun joukon leikkaus. (Väisälä 5:3)

   b) A on lokaalisti suljettu jos ja vain jos $A \Subset \overline{A}$ (ts. A on avoin $\overline{A}$:n relatiivitopologiassa).

Huom. Toistaiseksi kokeillaan maanantain harjoitusryhmän lisäksi toista harjoitusryhmää perjantaisin klo 10–12 salissa B119 (alkaen 10. 2.). Seuraa ilmoittelua kurssin kotisivulla.