

## Topologia II – Harjoitus 3 (6. 2. 2012)

- a) Olkoon  $\mathcal{B}$  topologisen avaruuden  $X$  kanta. Osoita, että osajoukko  $A \subset X$  on tiheä, mikäli se leikkaa jokaista  $\mathcal{B}$ :n epätyhjää jäsentä.  
b) Näytä esimerkillä  $\mathbb{R}$ :ssä, että a-kohdan väite ei välttämättä pidä paikkaansa, jos kannan sijasta tarkastellaan vain esikantaa.

2. Olkoon  $X$  joukko, jossa on ainakin kaksi alkioita. Osoita, että kokoelma

$$\mathcal{A} = \{X \setminus \{x\} : x \in X\}$$

on  $X$ :n kofiniitin topologian (ks. harj. 1, teht. 5) esikanta.

3. Varustetaan luonnollisten lukujen joukko  $\mathbb{N}$  kofiniitillä topologialla. Mitä  $\mathbb{N}$ :n pisteitä kohti jono  $(1, 2, 3, \dots)$  suppenee? (Vrt. Väisälä 3:19)
4. Tutki, ovatko kaavojen  $f(x) = e^x$  ja  $g(x) = -x$  määrittelemät funktiot  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuvia, kun sekä lähdössä että maalissa  $\mathbb{R}$  varustetaan ”puoliavoimella topologialla”  $\mathcal{T}_{pa}$ , joka on määritelty oppikirjan kohdassa 2.11.1. (Vrt. Väisälä 3:5)
5. Osoita, että projektio  $\text{pr}_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\text{pr}_1(x_1, x_2) = x_1$ , on avoin mutta ei suljettu kuvaus tavallisten topologioiden suhteen. (Väisälä 3:6)
6. Kun  $a \in \mathbb{Z}$  ja  $b \in \mathbb{N}$ , määritellään

$$N(a, b) = \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Tällaista joukkoa, tai paremminkin vastaavaa jonoa  $(\dots, a - 2b, a - b, a, a + b, a + 2b, \dots)$ , kutsutaan *aritmeettiseksi jonoksi*.

- a) Osoita, että joukot  $N(a, b)$  muodostavat erään topologian kannan kokonaislukujen joukossa  $\mathbb{Z}$ .
- b) Osoita, että em. topologialla on seuraavat ominaisuudet: i) jokainen avoin ja epätyhjä  $\mathbb{Z}$ :n osajoukko on ääretön, ii) jokainen kantajoukko  $N(a, b)$  on suljettu (ja tietysti myös avoin).
- c) Olkoon  $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$  alkulukujen joukko; ts.  $\mathbb{P}$  koostuu niistä luonnollisista luvuista  $p \geq 2$ , jotka eivät ole jaollisia muilla luonnollisilla luvuilla kuin 1 ja  $p$ . Perustele, että

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N(0, p).$$

- d) Päätele b- ja c-kohdan avulla, että  $\mathbb{P}$  on ääretön.

**Huom.** Tiivis luentopäiväkirja tulossa kurssin kotisivulle piakkoin!