

Topologia II – Harjoitus 2 (30. 1. 2012)

1. Anna esimerkki sellaisista joukon $\{1, 2, 3\}$ topologioista \mathcal{T} ja \mathcal{T}' , että $\mathcal{T} \cup \mathcal{T}'$ ei ole topologia.
2. a) Olkoot A ja B topologisen avaruuden X suljettuja osajoukkoja, joilla ei ole sisäpisteitä. Näytä, että joukolla $A \cup B$ ei ole sisäpisteitä. (Väisälä 1:11)
b) Osoita esimerkillä, että em. väite ei yleisesti päde (esim. \mathbb{R} :ssä), jos A ja B eivät ole suljettuja.
3. Olkoot A ja B topologisen avaruuden X osajoukkoja. Näytä, että $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$ ja $\partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B$. [*Apu.* Voit käyttää halutessasi esim. sulkeuman ominaisuuksia.]
4. Olkoon X ääretön topologinen avaruus, jossa kaikki äärettömät osajoukot ovat avoimia. Osoita, että X on diskreetti eli kaikki X :n osajoukot ovat avoimia. (Väisälä 1:8)
5. Osoita, että välit $[a, b[$, jossa $a < b$, ovat avoimia ja suljettuja avaruudessa $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{pa})$. Määritä välin $]0, 1[$ sulkeuma ja reuna tässä avaruudessa. (Väisälä 2:1)
[*Muista.* \mathcal{T}_{pa} on ns. puoliavoin topologia, joka on määritelty oppikirjan kohdassa 2.11.1.]
6. a) Osoita, että vaakasuorat janat

$$J(a, b, c) = \{(x, c) : a < x < b\}, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a < b,$$

muodostavat tason \mathbb{R}^2 erään topologian kannan.

- b) Määritä seuraavien joukkojen sulkeumat em. topologiassa: $A = \{(x, 0) : 0 < x < 1\}$, $B = \{(0, y) : 0 < y < 1\}$, $C = B(0, 1) = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. (Vrt. Väisälä 2:3)
- c) Vertaa em. topologiaa tason tavalliseen topologiaan (onko se hienompi, karkeampi vai ei kumpaakaan). [*Vihje.* Kannat.]

Kurssikokeet ovat pe 2. 3. klo 13.00–15.00 ja pe 4. 5. klo 13.00–15.00 Exactumissa.