Topologia I - Kevät 2012
Harjoitus 9, 2.-12.4. – Ratkaisuehdotuksia
Risto Hovila

1. Olkoon (f_n) jono jatkuvia funktioita $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, joka suppenee välillä $[a,b]$ tasaisesti kohti funktiota $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Osoita että tällöin

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Miksi integraalit ovat olemassa? Lyhyesti, päteekö vastaava tulos derivaatoille?

Ratkaisu. Integraalit $\int_a^b f_n(x)\,dx$ ovat olemassa, sillä funktiot f_n ovat jatkuvina kuvauksina integroituvia suljetulla välillä $[a,b]$. Kuvaus f on jatkuvien kuvausten tasaisena rajafunktiona jatkuva ja näin ollen myös integroituva välillä $[a,b]$.

Osoitetaan sitten, että integraalien $\int_a^b f_n(x)\,dx$ muodostama lukujono suppenee. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin $\epsilon/(b-a) > 0$ ja voidaan valita $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in [a,b]\} < \frac{\epsilon}{b-a}$$

kaikilla $n \geq n_0$. Tällöin

$$\Big|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\Big| \leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dx = \epsilon$$

kaikilla $n \geq n_0$, joten

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Derivaatoille vastaava tulos ei päde: Määritellään $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $g_n(x) = \sin(nx)/n$ jokaiselle $n \in \mathbb{N}$. Nyt $g_n \to 0$ tasaisesti, mutta derivaattafunktiot $g_n' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n'(x) = \cos(nx)$, eivät suppene edes pisteittäin.

2. Olkoon $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < x^2\}$ ja $B = \mathbb{R}^2 \setminus A$. Selvästi $\mathbf{0} = (0,0) \in \bar{A}$ ja $\mathbf{0} \in \bar{B}$ (piirrä itsellesi kuva). Määritellään kuvaus $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } z = (x,y) \in A, \\ 0, & \text{kun } z = (x,y) \in B. \end{cases}$$

(a) Anna raja-arvot $\lim_{z\to\mathbf{0}, z\in A} f(z)$ ja $\lim_{z\to\mathbf{0}, z\in B} f(z)$ pitkin joukkoja A ja B.
(b) Minkä johtopäätöksen niistä voit vetää, jos kysytään onko f jatkuva $\mathbf{0}$:ssa?
(c) Osoita että $\lim_{z\to\mathbf{0}, z\in L} f(z) = 0$ kaikilla origon kautta kulkevilla suorilla L.
Huom. Voi siis sanoa että "korkeaulotteisempi raja-arvo ei niin vain seuraa matalaulotteisemmista raja-arvoista" (poikkeus **kaikki** jonot). Sama koskee jatkuvuutta.

Ratkaisu. (a) Koska kaikilla pisteen $\mathbf{0}$ ympäristöillä U pätee $f(z) = 1$, kun $z \in A \cap U$ ja $f(z) = 0$, kun $z \in B \cap U$, niin $\lim_{z\to\mathbf{0}, z\in A} f(z) = 1$ ja $\lim_{z\to\mathbf{0}, z\in B} f(z) = 0$.

(b) Kohdan (a) nojalla raja-arvoa $\lim_{z\to\mathbf{0}, z\in X} f(z)$ ei ole olemassa, sillä raja-arvo on yksikäsitteinen (huomautus 11.27(1)) ja säilyy, kun joukkoa, jota pitkin raja-arvo otetaan, pienennetään (huomautus 11.27(2)). Näin ollen kuvaus f ei ole jatkuva pisteessä $\mathbf{0}$ (lause A tai kirjan 11.28).

(c) Olkoon L origon kautta kulkeva suora. Jos $L = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ tai $L = \{(0,y) \mid y \in$

$\mathbb{R}\}$, niin $L \subset B$ ja huomautuksen 11.27(2) nojalla

$$\lim_{z\to\mathbf{0}, z\in L} f(z) = \lim_{z\to\mathbf{0}, z\in B} f(z) = 0.$$

Jos taas $L = \{(x, y) \mid y = kx\}$, missä $k \neq 0$, niin $|k| > 0$ ja kaikilla $z = (x, y) \in B(\mathbf{0}, |k|) \cap L$ pätee $|y| = |k||x| > |x||x| = x^2$ ja siten $z \in B$. Siispä $f(z) = 0$ kaikilla $z \in B(\mathbf{0}, |k|) \cap L$ ja näin ollen $\lim_{z\to\mathbf{0}, z\in L} f(z) = 0$ (koska "pienet ympäristöt ratkaisevat" ja niissä $f(z)$ on vakio 0).

3. (12:11). Olkoon X täydellinen ja $f : X \to Y$ bilipschitz. Osoita että kuvajoukko fX on täydellinen ja siis suljettu Y:ssä.

Ratkaisu. Merkitään avaruuden X metriikkaa $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ ja avaruuden Y metriikkaa $d' : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$. Kuvaus f on bilipschitz, joten on olemassa vakio $M \geq 1$ siten, että

$$\frac{1}{M} d(x, y) \leq d'(f(x), f(y)) \leq Md(x, y) \text{ kaikilla } x, y \in X.$$

Olkoon (y_n) Cauchy-jono joukossa fX. Kuvaus f on bilipschitz-kuvauksena injektio, joten jokaisella $n \in \mathbb{N}$ on olemassa yksikäsitteinen $x_n \in X$, jolle $f(x_n) = y_n$. Olkoon $\epsilon > 0$. Tällöin, koska jono (y_n) on Cauchy, on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $d'(y_m, y_k) < \epsilon/M$ kaikilla $m, k \geq n_0$. Nyt

$$d(x_m, x_k) \leq Md'(f(x_m), f(x_k)) = Md'(y_m, y_k) < M\epsilon/M = \epsilon$$

kaikilla $m, k \geq n_0$, joten (x_n) on avaruuden X Cauchy-jono. X on täydellinen, joten on olemassa $x \in X$, jolle $x_n \to x$. Lauseen 11.8 nojalla kuvaus f on jatkuvana kuvauksena jonojatkuva, joten valitsemalla $y = f(x)$ nähdään, että $y_n = f(x_n) \to f(x) = y \in fX$. Siispä fX on täydellinen, sillä sen mielivaltainen Cauchy-jono suppenee.

4. (12:7).

(a) Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono sen suljettuja epätyhjiä osajoukkoja, joiden läpimitat $d(A_n)$ suppenevat kohti nollaa. Osoita että joukkojen A_n leikkauksessa on tasan yksi piste.

(b) (muunnos) Anna esimerkki $\mathbb{R}$:n osajoukoista U_n, jotka muuten toteuttavat saman kuin (a)-kohdan joukot A_n mutta ovat suljetun sijasta avoimia, ja joiden leikkaus onkin sitten tyhjä.

Ohje. (a) Valitse jokaisella $n \in \mathbb{N}$ piste $x_n \in A_n$ ja tarkastele jonoa (x_n). Avaruuden X täydellisyys on tarpeen.

Ratkaisu. **(a)** Jos $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$, niin

$$d(x, y) \leq d(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq d(A_n) \to 0, \text{ kun } n \to \infty,$$

eli $x = y$ ja leikkauksessa voi siis olla enintään yksi piste. Osoitetaan, että tällainen piste on olemassa.

Valitaan jokaisella $n \in \mathbb{N}$ piste $x_n \in A_n$, jolloin saadaan avaruuden X jono (x_n). Kun $n \in \mathbb{N}$, merkitään $B_n = \{x_i \mid i \geq n\}$. Tällöin $B_n \subset A_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, sillä $A_{n+1} \subset A_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$. Nyt $d(B_n) \leq d(A_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja siten oletuksen $d(A_n) \to 0$ nojalla myös $d(B_n) \to 0$. Näin ollen (x_n) on lauseen 12.2 nojalla Cauchy, joten avaruuden X täydellisyyden nojalla on olemassa $x \in X$ siten, että $x_n \to x$.

Osoitetaan, että $x \in A_m$ kaikilla $m \in \mathbb{N}$, jolloin siis $x \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} A_m$. Olkoon $m \in \mathbb{N}$

mielivaltainen. Jono (y_n), missä $y_n = x_{m+n}$, on jonon (x_n) osajono, ja lauseen 11.17 nojalla $y_n \to x$. Nyt $y_n \in B_m$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lisäksi $B_m \subset A_m$, joten (y_n) on joukon A_m jono. Joukko A_m on suljettu, joten lauseen 11.6 nojalla $x = \lim y_n \in \overline{A_m} = A_m$.

(b) Valitaan $U_n =]0, 1/n[$, kun $n \in \mathbb{N}$. Nyt $U_{n+1} \subset U_n$ jokaisella $n \in \mathbb{N}$, joukot U_n ovat avoimia ja epätyhjiä ja lisäksi $d(U_n) = 1/n \to 0$, kun $n \to \infty$, mutta $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \emptyset$.

5. (12:14). Olkoon $(E, ||*||)$ täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus, ja olkoon $f : E \to E$ kontraktio. Osoita että yhtälö $F(x) = x + f(x)$ määrittelee homeomorfismin $F : E \to E$, joka on bilipschitz.
Ohje. Kiinnitetään $y \in E$ ja merkitään $g_y(x) = y - f(x)$. Osoita että kuvauksella $g_y : E \to E$ on täsmälleen yksi kiintopiste $G(y)$, jolloin saadaan kuvaus $G : E \to E, y \mapsto G(y)$. Osoita sitten että $F \circ G = G \circ F = id_E$ ja että F on bilipschitz. Kiinnitä erityistä huomiota epäyhtälöketjun puoleen $m||x-z|| \le ||F(x)-F(z)||$ kaikilla $x, z \in E$, jossa vakiolta vaaditaan $m > 0$.

Ratkaisu. Koska f on kontraktio, on se q-Lipschitz jollain $0 \le q < 1$. Kiinnitetään tällainen q. Määritellään jokaisella $y \in E$ kuvaus $g_y : E \to E$ asettamalla $g_y(x) = y - f(x)$. Tällöin g_y on kontraktio jokaisella $y \in E$, sillä

$$||g_y(x) - g_y(z)|| = ||y - f(x) - y + f(z)|| = ||f(x) - f(z)|| \le q||x - z||$$

kaikilla $x, z \in E$. Näin ollen Banachin kiintopistelauseen 12.8 nojalla kuvauksella g_y on täsmälleen yksi kiintopiste $G(y)$, jolle pätee siis

$$g_y(G(y)) = y - f(G(y)) = G(y), \quad \text{eli } y = G(y) + f(G(y)) = F(G(y)).$$

Näin saadaan siis kuvaus $G : E \to E, y \mapsto G(y)$, jolle $F \circ G = id_E$. Jos $y \in E$, niin $G(F(y))$ on kuvauksen $g_{F(y)}$ kiintopiste. Toisaalta

$$g_{F(y)}(y) = F(y) - f(y) = y + f(y) - f(y) = y,$$

joten myös y on kuvauksen $g_{F(y)}$ kiintopiste. Yksikäsitteisyyden nojalla $G(F(y)) = y$, joten $G \circ F = id_E$. Siispä F on bijektio ja G on sen käänteiskuvaus.

(F:n bijektiivisyyden voi nähdä myös seuraavasti: kaikilla $x, y \in E$ pätee

$$F(x) = y \iff x + f(x) = y \iff x = y - f(x) = g_y(x) \iff x = G(y),$$

joten F on bijektio ja $F^{-1} = G$.)

Osoitetaan vielä, että F on bilipschitz. Olkoot $x, y \in E$. Tällöin

$$\begin{aligned} ||F(x) - F(y)|| &= ||x + f(x) - y - f(y)|| \\ &\le ||x - y|| + ||f(x) - f(y)|| \\ &\le (1 + q)||x - y||, \end{aligned}$$

missä q on kuvauksen f kontraktiovakio (ja siis $0 \le q < 1$). Toisaalta myös

$$\begin{aligned} ||F(x) - F(y)|| &= ||x + f(x) - y - f(y)|| \\ &\ge \big|||x - y|| - ||f(x) - f(y)||\big| \\ &\ge (1 - q)||x - y||. \end{aligned}$$

Nyt $1 + q \le \frac{1}{1-q}$, joten F on $\frac{1}{1-q}$-bilipschitz. Koska F on bijektio ja bilipschitz, se on homeomorfismi.

6. (12:15, osa). Tutki seuraavista funktioista $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovatko ne tasaisesti jatkuvia koko $\mathbb{R}$:ssä:

$$(\mathbf{a}) \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \qquad (\mathbf{b}) \quad f(x) = x^{1/3}.$$

Ohje. Väliarvolauseesta on hyötyä.

Ratkaisu. (a) Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Rationaalifunktiona f toteuttaa väliarvolauseen ehdot välillä $[x, y]$, joten on olemassa piste $z \in]x, y[$, jolle

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y), \quad \text{missä } f'(z) = \frac{1-z^2}{(1+z^2)^2}.$$

Nyt kaikilla $z \in \mathbb{R}$

$$|f'(z)| = \frac{|1-z^2|}{(1+z^2)^2} \le \frac{1+z^2}{(1+z^2)^2} = \frac{1}{1+z^2} \le 1,$$

joten kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ saadaan arvio

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| \le |x-y|.$$

Siispä f on Lipschitz-kuvaus ja siten tasaisesti jatkuva (esimerkki 12.13(3)).

(b) Määritellään aluksi joukot $A_1 =]-\infty, -1]$, $A_2 = [-2, 2]$ ja $A_3 = [1, \infty[$. Olkoon $\epsilon > 0$. Kuvaus f on jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä, ja jos $x, y \in \mathbb{R}$ siten, että $1 \le x < y$ tai $x < y \le -1$, niin f toteuttaa väliarvolauseen ehdot välillä $[x, y]$ ja on olemassa piste $z \in]x, y[$, jolle

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x-y), \quad \text{missä } f'(z) = \frac{1}{3z^{2/3}}.$$

Nyt kaikilla $z \in \mathbb{R}$, joilla $|z| \ge 1$,

$$|f'(z)| = \frac{1}{3|z|^{2/3}} \le \frac{1}{3},$$

joten saadaan arvio

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x-y| \le \frac{1}{3}|x-y|$$

aina, kun $x, y \in A_1$ tai $x, y \in A_3$. Siispä $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ aina, kun $|x-y| < 3\epsilon$ ja $x, y \in A_1$ tai $x, y \in A_3$.

Esimerkin 12.13(4) nojalla suljetulla välillä jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva ko. välillä, joten on olemassa luku $\delta_1 > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ aina, kun $|x-y| < \delta_1$ ja $x, y \in A_2$.

Valitaan $\delta = \min\{1, 3\epsilon, \delta_1\}$. Nyt, jos $x, y \in \mathbb{R}$ ja $|x-y| < \delta$, niin $x, y \in A_i$ jollain $i \in \{1, 2, 3\}$ ja siten $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Kuvaus f on siis tasaisesti jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.

Huom. (b)-kohdan voi ratkaista myös käyttämättä esimerkkiä 12.13(4): Olkoon $\epsilon > 0$. Koska f on jatkuva 0:ssa, voidaan valita $a > 0$ siten, että $|f(x) - f(0)| < \epsilon/2$ kun $|x| < 2a$. Tällöin kaikilla $x, y \in]-2a, 2a[$ pätee $|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(0)| + |f(0) - f(y)| < \epsilon$. Kuten yllä, käyttämällä väliarvolausetta nähdään, että f on Lipschitz ja siten tasaisesti jatkuva joukoissa $]-\infty, -a]$ ja $[a, \infty[$, joten voidaan valita $\delta_0 > 0$ siten, että $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ aina, kun $|x-y| < \delta_0$ ja $x, y \in]-\infty, -a]$ tai $x, y \in [a, \infty[$. Määritellään joukot $A_1 =]-\infty, -a]$, $A_2 =]-2a, 2a[$ sekä $A_3 = [a, \infty[$ ja valitaan $\delta = \min\{a, \delta_0\}$. Nyt, jos $x, y \in \mathbb{R}$ ja $|x-y| < \delta$, niin $x, y \in A_i$ jollain $i \in \{1, 2, 3\}$ ja siten $|f(x) - f(y)| < \epsilon$. Kuvaus f on siis tasaisesti jatkuva koko $\mathbb{R}$:ssä.