Topologia I, harjoitus 8, 26.–29.3.2012, ratkaisut (Jouni Luukkainen), 2 sivua

Teht. 1. (11:2) *Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$ ja (x_k) jono A:ssa (siis $x_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$). Osoita, että jonon kasautumisarvot kuuluvat sulkeumaan $\overline{A}$.*

Ratk. Olkoon $a \in X$ jonon (x_k) kasautumisarvo. Tällöin jonolla (x_k) on sellainen osajono (x_{k_j}), jolla $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = a$ (lause 11.18). Koska myös (x_{k_j}) on A:n jono, niin täten $a \in \overline{A}$ (lause 11.6).

Teht. 2. *Tutki, suppenevatko seuraavat $\mathbb{R}^2$:n jonot (x_k). Myönteisessä tapauksessa anna jonon raja-arvo. Kielteisessä tapauksessa tutki, onko jonolla edes yhtä suppenevaa osajonoa (ja siten kasautumisarvoa). Lyhyt esitys riittää.*

(a) $x_k = \big((1/5)^k, 1^k\big)$, **(b)** $x_k = (2^{-k}, (-1)^k)$, **(c)** $x_k = \big(k^{1/2}, (-2)^{-k}\big)$.

Ratk. (a) Koska $(1/5)^k \to 0$ ja $1^k = 1 \to 1$, kun $k \to \infty$, niin $x_k \to (0,1)$, kun $k \to \infty$ (lause 11.11).

(b) Tunnetusti $\mathbb{R}$:n jono $((-1)^k) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ hajaantuu. Täten myös jono (x_k) hajaantuu (lause 11.11). Toisaalta $x_{2k-1} = (2^{-(2k-1)}, -1) \to (0,-1)$ ja $x_{2k} = (2^{-2k}, 1) \to (0,1)$, kun $k \to \infty$. Siis osajonot (x_{2k-1}) ja (x_{2k}) suppenevat.

(c) Jono $(k^{1/2})$ ja sen jokainen osajono hajaantuvat, sillä $\lim_{k\to\infty} k^{1/2} = \infty$. Siis jono (x_k) hajaantuu, eikä sillä ole yhtään suppenevaa osajonoa.

Teht. 3. *Todista epäsuorasti (vastaoletuksen kautta) lauseen* 11.8 *implikaatio* (2) $\Rightarrow$ (1), *ts. että jos funktio $f\colon X \to Y$ on jonojatkuva pisteessä $a \in X$, niin se on siinä myös jatkuva (tulos koskee metrisiä avaruuksia X ja Y).*

Ratk. Olkoon funktio $f\colon X \to Y$ jonojatkuva pisteessä $a \in X$. Väitetään, että f on jatkuva pisteessä a. Tehdään vastaoletus, että f ei ole jatkuva a:ssa. Tällöin on olemassa sellainen pisteen $f(a)$ ympäristö $V \subset Y$, että $fU \not\subset V$ jokaisella a:n ympäristöllä $U \subset X$. Täten jokaista $k \in \mathbb{N}$ kohti löytyy piste $x_k \in B(a, 1/k)$, jolla $f(x_k) \notin V$. Koska $d(x_k, a) < 1/k \to 0$, kun $k \to \infty$, niin $x_k \to a$, kun $k \to \infty$. Koska f on jonojatkuva a:ssa, niin tästä seuraa, että $f(x_k) \to f(a)$, kun $k \to \infty$. Mutta koska $Y \setminus V$ on suljettu joukko Y:ssä ja $f(x_k) \in Y \setminus V$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin tällöin $f(a) \in Y \setminus V$ (seuraus 11.7); ristiriita. Lopussa ristiriita saadaan myös huomaamalla, että ehdon $f(x_k) \to f(a)$ tähden on olemassa sellainen $k_0 \in \mathbb{N}$, että $f(x_k) \in V$ kaikilla $k \geq k_0$, jolloin erityisesti on $f(x_{k_0}) \in V$ vastoin pisteen x_{k_0} valintaa.

Teht. 4. *Olkoot (x_k) ja (y_k) reaalilukujonoja, joilla $x_k \to 3\pi/4$ ja $y_k \to \sqrt{\pi}/2$. Merkitään $w_k = \sin(x_k - y_k^2)$. Osoita tarkasti, että $w_k \to 1 = \sin(\pi/2)$.*

Ohje. Käytä funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \sin(x - y^2)$, jonojatkuvuutta (lauseen 11.8 implikaatio (1) $\Rightarrow$ (2)) ja merkitse $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$, jolloin $w_k = f(z_k)$.

Ratk. Funktio f on selvästi jatkuva, joten se on jonojatkuva. Lisäksi $z_k = (x_k, y_k) \to (3\pi/4, \sqrt{\pi}/2)$. Täten $w_k = \sin(x_k - y_k^2) = f(z_k) \to f(3\pi/4, \sqrt{\pi}/2) = \sin(3\pi/4 - \pi/4) = \sin(\pi/2) = 1$.

Teht. 5. (11:10, osaksi) *Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio, joka kuvaa [seuraavalla tavalla:] $f_n(x) = \max\{0, x-n\}$, kun $x \in \mathbb{R}$. Tutki, suppeneeko funktiojono (f_n)*

(a) *pisteittäin $\mathbb{R}$:ssä,* **(b)** *tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä,* **(c)** *tasaisesti joukossa $]-\infty, 10^{10}]$.*

Ratk. (a) Jono (f_n) suppenee $\mathbb{R}$:ssä pisteittäin kohti funktiota 0, sillä jos $x \in \mathbb{R}$ ja valitaan sellainen $n_x \in \mathbb{N}$, että $n_x \geq x$, niin ehdosta $n \geq n_x$ seuraa, että $n \geq x$ eli $x - n \leq 0$, jolloin $f_n(x) = \max\{0, x-n\} = 0 \to 0$, kun $n \to \infty$.

(b) Jono (f_n) ei suppene tasaisesti $\mathbb{R}$:ssä (siis kohden pisteittäistä rajafunktiota 0), sillä jos $n \in \mathbb{N}$, niin $f_n(x) = \max\{0, x-n\} = x - n \to \infty$, kun $n \leq x \to \infty$, joten $\sup\{|f_n(x) - 0| \mid x \in \mathbb{R}\} = \infty$.

(c) Jono (f_n) suppenee tasaisesti joukossa $\Delta =]-\infty, 10^{10}]$ kohden nollafunktiota, sillä jos $n \geq 10^{10}$, niin (a)-kohdassa nähdyn mukaisesti on $f_n(x) = 0$ kaikilla $x \in \Delta$, jolloin siis $\sup\{|f_n(x) - 0| \mid x \in \Delta\} = 0 \to 0$, kun $n \to \infty$.

Teht. 6. (2 suorituspisteen arvoinen) *Olkoon X joukko, d metriikka siinä ja kuvaus $f\colon X \to X$ bijektio.*

(a) *Osoita, että myös $e(x,y) = d(f(x), f(y))$ (kaikilla $x, y \in X$) on metriikka joukossa X ja että kuvaus $f\colon (X, e) \to (X, d)$ on (bijektiivinen) isometria.*

(b) *Oletetaan lisäksi, että kuvaus $f\colon (X,d) \to (X,d)$ on homeomorfismi. Osoita, että tällöin $d \sim e$.*

(c) *Sovella edellisiä kohtia joukkoon* $\mathbb{R}$ *ja sen metriikkaan* $e(x,y) = |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}|$, *ja osoita* e *(topologisesti) ekvivalentiksi tavallisen metriikan kanssa.*

Ratk. (a) Todetaan ensiksi, että e on ei-negatiivisarvoinen: $e(x,y) = d(f(x), f(y)) \geq 0$ kaikilla $x, y \in X$.
Kolmioepäyhtälö on voimassa:

$$e(x,z) = d(f(x), f(z)) \leq d(f(x), f(y)) + d(f(y), f(z)) = e(x,y) + e(y,z) \quad \text{kaikilla } x, y, z \in X.$$

Symmetria pätee:

$$e(x,y) = d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = e(y,x) \quad \text{kaikilla } x, y \in X.$$

Etäisyys on nolla täsmälleen silloin kuin pitääkin: Kaikilla $x, y \in X$ on f:n injektiivisyyden tähden

$$e(x,y) = 0 \iff d(f(x), f(y)) = 0 \iff f(x) = f(y) \iff x = y.$$

Siis e on metriikka X:ssä.

Nyt $d(f(x), f(y)) = e(x,y)$ kaikilla $x, y \in X$, joten $f\colon (X,e) \to (X,d)$ on (bijektiivinen) isometria.

(b) Oletetaan, että kuvaus $f\colon (X,d) \to (X,d)$ on homeomorfismi. Koska (a)-kohdan mukaan bijektio $f\colon (X,e) \to (X,d)$ on isometria ja täten homeomorfismi, jolloin myös sen käänteiskuvaus $f^{-1}\colon (X,d) \to (X,e)$ on (isometria ja) homeomorfismi, niin joukon X identtinen kuvaus

$$\mathrm{id}_X = f^{-1} \circ f\colon (X,d) \to (X,d) \to (X,e)$$

on homeomorfismeista yhdistettynä kuvauksena homeomorfismi (lause 9.7). Täten $d \sim e$.

(c) Tarkastellaan $\mathbb{R}$:ää varustettuna sen tavallisella euklidisella metriikalla d. Tällöin bijektio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, ja sen käänteiskuvaus $f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, ovat jatkuvia. Täten f on homeomorfismi. Näin ollen (a)- ja (b)-kohtien nojalla e on ehdon $e(x,y) = |f(x) - f(y)|$ kaikilla $x, y \in X$ määrittelemänä metriikka joukossa $\mathbb{R}$, ja $d \sim e$.