Topologia I
Harjoitus 7
19. 3. 2012 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Santeri Miihkinen)

1. Onko funktio $f\colon [0,10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$, *(a) Lipschitz-kuvaus, (b) bilipschitz-kuvaus, (c) upotus? Ohje. Väliarvolause.*

Ratkaisu. (a) Olkoot $x, y \in [0, 10]$, $x < y$. Polynomifunktiona f toteuttaa väliarvolauseen ehdot välillä $[x, y]$, joten on olemassa piste $z \in]x, y[$, jolle

$$f(x) - f(y) = f'(z)(x - y),$$

jossa $f'(z) = 3z^2 + 1$. Nyt voidaan arvioida

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \leq (3 \cdot 10^2 + 1)|x - y| = 301|x - y|$$

kaikilla $x, y \in [0, 10]$, joten f on Lipschitz-kuvaus.

(b) Koska pätee myös

$$|f(x) - f(y)| = |f'(z)||x - y| \geq (3 \cdot 0^2 + 1)|x - y| = |x - y|$$

kaikilla $x, y \in [0, 10]$, niin funktio f on bilipschitz.

(c) Lauseen 9.19 nojalla funktio f on bilipschitz-kuvauksena upotus.

2. Tarkastellaan $\mathbb{R}^3$ *:n pintaa* $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \; z = \sin x + \cos y\}$ *varustettuna euklidisella metriikalla. Pidetään tunnettuna, että kuvaus*

$$f\colon A \to \mathbb{R}^2,\ f(x, y, z) = (x, y)$$

kun $(x, y, z) \in A$*, on bijektio. Osoita että se on homeomorfismi ja siten* $A \approx \mathbb{R}^2$*. Pidetään tunnettuna, että kuvaukset* $\sin, \cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ovat jatkuvia.*

Ratkaisu. Määritellään kuvaus

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to A,\ g(x, y) = (x, y, \sin x + \cos y).$$

Todetaan ensin, että kuvaus g on kuvauksen f käänteiskuvaus. Koska kaikilla $(x, y, z) \in A$ pätee $z = \sin x + \cos y$, niin saadaan

$$(g \circ f)(x, y, z) = g(f(x, y, z)) = g(x, y) = (x, y, z)$$

kaikilla $(x, y, z) \in A$ ja siis $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Toisaalta

$$(f \circ g)(x, y) = f(g(x, y)) = f(x, y, \sin x + \cos y) = (x, y)$$

kaikilla $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, joten $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Siispä pätee $g = f^{-1}$.

Koska kuvauksen f ja sen käänteiskuvauksen f^{-1} komponenttikuvaukset ovat projektiokuvauksina, sini- ja kosinifunktioiden summina sekä yhdistettyinä kuvauksina näistä jatkuvia, niin lauseen 5.9 nojalla kuvaukset f ja f^{-1} ovat jatkuvia. Näin ollen f on homeomorfismi.

3. Olkoon $x \in X$ ja $\emptyset \neq A \subset X$. Ehto $d(x, A) > 0$ on topologinen ominaisuus (sulkeuma!). Olkoon $f\colon (X, d) \to (Y, e)$ homeomorfismi. Osoita että todellakin $e(f(x), f(A)) > 0$, kun $d(x, A) > 0$. Ohje. Sopivia lauseita esimerkiksi 6.11 ja 6.12. Huom. On syytä olla varovainen sen suhteen, mikä on tai ei topologinen ominaisuus. Esimerkiksi ominaisuus $d(A, B) > 0$ ei ole.

Ratkaisu. Koska kuvaus f on homeomorfismi, niin pätee $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ tuloksen 9.16.4 nojalla. Lisäksi lauseen 6.11 nojalla on voimassa $d(x, A) > 0 \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$. Näin ollen saadaan

$$d(x, A) > 0 \Leftrightarrow x \notin \overline{A} \Leftrightarrow f(x) \notin f(\overline{A}) = \overline{f(A)} \Leftrightarrow e(f(x), f(A)) > 0.$$

4 (10:1). Kuvaus $e\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $e(x, y) = \sqrt{|x - y|}$, on metriikka $\mathbb{R}$:ssä (ei tarvitse todistaa). Onko se (a) ekvivalentti, (b) bilipschitz-ekvivalentti $\mathbb{R}$:n tavallisen euklidisen metriikan d kanssa? Ohje. Paras tutkia identtisen kuvauksen jatkuvuutta ja Lipschitz-jatkuvuutta näiden määritelmiin nojaten.

Ratkaisu. (a) Osoitetaan, että metriikat d ja e ovat ekvivalentit osoittamalla identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, e)$ homeomorfismiksi. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \varepsilon^2$. Tällöin

$$e(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(y)) = e(x, y) = \sqrt{|x - y|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon,$$

kun $d(x, y) = |x - y| < \delta$. Siis $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, e)$ on jatkuva.

Valitaan sitten $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Nyt

$$d(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(y)) = |x - y| = (\sqrt{|x - y|})^2 = e(x, y)^2 < \delta^2 = \varepsilon,$$

kun $e(x,y) < \delta$. Siten $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R},e) \to (\mathbb{R},d)$ on jatkuva. Siispä kuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R},d) \to (\mathbb{R},e)$ on homeomorfismi.

(b) Osoitetaan, että identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R},d) \to (\mathbb{R},e)$ ei ole Lipschitz, jolloin metriikat d ja e eivät ole bilipschitz-ekvivalentteja. Olkoon $M \geq 1$. Valitaan pisteet $x = \frac{1}{4M^2}$ ja $y = \frac{1}{2M^2}$, jolloin

$$e(\mathrm{id}(x), \mathrm{id}(y)) = \sqrt{|x-y|} = \frac{1}{2M} > \frac{1}{4M} = M|x-y| = Md(x,y).$$

Siten identtinen kuvaus $\mathrm{id}\colon (\mathbb{R},d) \to (\mathbb{R},e)$ ei ole Lipschitz.

5 (9:5, muunnos). Konstruoi jokin homeomorfismi $f : B^2 \approx \mathbb{R}^2$, jossa $B^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 |\ |x| < 1\}$ on tason avoin yksikkökiekko. Löydätkö käänteiskuvauksen?

Ohje. Liiku radiaalisti eli kerro yksikkövektoria $x/|x|$, ja sitä varten tarkastele vastavaa tilannetta $\mathbb{R}$:ssä (geometrisesti tai voit käyttää yhtä hyvin funktiota $\tan : [0,\pi/2[\to [0,\infty[$).

Ratkaisu. Osoitetaan, että kuvaus

$$f : B^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x) = \frac{x}{1-|x|},$$

on homeomorfismi. Selvästi kuvaus f on hyvin määritelty ($1 - |x| \neq 0$) ja jatkuva kahden jatkuvan kuvauksen osamääränä (esimerkki 5.4.3). Osoitetaan kuvaus

$$g : \mathbb{R}^2 \to B^2,\ g(y) = \frac{y}{1+|y|}$$

sen käänteiskuvaukseksi. Nyt kuvaus g on hyvin määritelty, sillä

$$|g(y)| = \frac{|y|}{1+|y|} < \frac{|y|}{|y|} = 1$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\overline{0}\}$ (ja $g(\overline{0}) = 0 < 1$). Lisäksi kuvaus g on jatkuva (esimerkki 5.4.3). Koska

$$(f \circ g)(y) = \frac{g(y)}{1-|g(y)|} = \frac{y}{(1+|y|)(1-\frac{|y|}{1+|y|})} = y$$

kaikilla $y \in \mathbb{R}^2$, niin $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Lisäksi kaikilla $x \in B^2$ pätee

$$(g \circ f)(x) = \frac{f(x)}{1+|f(x)|} = \frac{x}{(1-|x|)(1+\frac{|x|}{1-|x|})} = x,$$

joten $g \circ f = \mathrm{id}_{B^2}$, ja siten on saatu $g = f^{-1}$. Siispä kuvaus f on homeomorfismi.

Huomautus. Toinen (ehkä työläämpi) tapa ratkaista tehtävä olisi määritellä kuvaus

$$f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}|x|\right)\frac{x}{|x|},$$

kun $x \in B^2 \setminus \{\overline{0}\}$ ja $f(\overline{0}) = \overline{0}$ ja osoittaa se homeomorfismiksi $f\colon B^2 \approx \mathbb{R}^2$.