Topologia I, harjoitus 6, 12.–15.3.2012, ratkaisut (Jouni Luukkainen), 2 sivua

Teht. 1. (6:16) *Joukko* $A \subset X$ *on avaruuden* X retrakti, *jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus* $f\colon X \to A$ *(*A*:ssa indusoitu metriikka), että rajoittuma* $f|A$ *on* A*:n identtinen kuvaus, ts.* $f(x) = x$ *kaikilla* $x \in A$*. Osoita, että retrakti on aina suljettu joukko (avaruudessa* X*).*

Ohjeita. (1) Komplementti avoimeksi: Etsi komplementin pisteen $x \in X \setminus A$ ja sen kuvan $f(x)$ sellaiset erilliset ympäristöt U ja V avaruudessa X, että $fU \subset V$.

(2) Voit käyttää myös harjoituksen 5 tehtävän 3 tulosta.

Ratk. (1). Olkoon $x \in X \setminus A$. Koska $f(x) \in A$ ja $x \notin A$, niin $f(x) \neq x$, joten pisteillä x ja $f(x)$ on erilliset ympäristöt U_0 ja V_0 avaruudessa X (Lause 3.11). Nyt $V = V_0 \cap A$ on pisteen $f(x)$ ympäristö A:ssa. Koska f on jatkuva, on olemassa sellainen pisteen x ympäristö U_1 avaruudessa X, että $fU_1 \subset V$. Tällöin $U = U_0 \cap U_1$ on x:n ympäristö X:ssä, ja $U \cap V \subset U_0 \cap V_0 = \emptyset$ sekä $fU \subset fU_1 \subset V$. Jos nyt $y \in U$, niin $f(y) \in V$, joten $f(y) \neq y$ ja siis $y \notin A$. Täten $U \subset X \setminus A$. Näin ollen $X \setminus A$ on avoin ja siis A suljettu avaruudessa X.

Ratk. (2). Sovelletaan harjoituksen 5 tehtävää 3 jatkuviin kuvauksiin $\mathrm{id}\colon X \to X$, $x \mapsto x$, ja $\tilde{f} = i_A \circ f\colon X \to X$, jossa $i_A\colon A \to X$, $x \mapsto x$, on joukon A inkluusiokuvaus joukkoon X. Oletuksen nojalla on $\tilde{f}|A = \mathrm{id}\,|A$ (sama lähtö, sama maali, samat arvot!). Täten $\tilde{f}|\overline{A} = \mathrm{id}\,|\overline{A}$.

Nyt, jos $x \in \overline{A}$, niin $x = \tilde{f}(x) = f(x) \in A$. Siis $\overline{A} \subset A$. Täten A on suljettu avaruudessa X.

Teht. 2. *Olkoon*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \text{ ja } x \geq 0\}.$$

Määritä joukot $\operatorname{int} A$, ∂A *ja* $\overline{A}$ *avaruudessa* $X = \mathbb{R}^2$*. Melko yksityiskohtainen perustelu.*

Ratk. Selvästi A on tason suljetun ensimmäisen koordinaattineljänneksen $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ ja } y \geq 0\}$ ja x-akselin $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ yhdiste ja siten suljettu. Täten $A = \overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$ (Lause 8.3(4)).

Esitetään myös tehtävää 3 ajatellen A erillisenä yhdisteenä $A = \bigcup_{i=1}^{5} A_i$, jossa $A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ja } y > 0\}$, $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ ja } y = 0\}$, $A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ja } y > 0\}$, $A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ja } y < 0\}$ ja $A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ja } y = 0\}$.

Tarkastellaan pistettä $z = (x, y) \in A$. Jos $z \in A_1$ ja $0 < r < \min(x, y)$, niin $B(z, r) \subset A$, joten $z \in \operatorname{int} A$. Jos taas $z \in A_2$ ja $r > 0$, niin $(x, -r/2) \in B(z, r) \setminus A$ ja tietysti toisaalta $z \in B(z, r) \cap A$, joten $z \in \partial A$. Jos vihdoin $z \in A_3 \cup A_4 \cup A_5$ ja $r > 0$, niin $(-r/2, y) \in B(z, r) \setminus A$, joten (vaihtelun vuoksi jatketaan toisella tavalla kuin äsken) $z \in A \setminus \operatorname{int} A \subset \partial A$. Täten $\operatorname{int} A = A_1$ ja $\partial A = \bigcup_{i=1}^{4} A_i$.

Teht. 3. *Olkoon joukko* A *kuten edellisessä tehtävässä. Määritä joukot* $\operatorname{int} A$, ∂A *ja* $\overline{A}$ *avaruudessa* $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$*. Jälleen melko yksityiskohtainen perustelu.*

Mikä yksinkertainen relaatio pätee reunojen $\partial_X A$ *ja* $\partial_Y A$ *välillä? Sattuma?*

Ratk. Siis $Y = Y_1 \cup Y_2$, kun $Y_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ ja } y \geq 0\}$ ja $Y_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0 \text{ ja } y \leq 0\}$.

Joukko A on suljettu X:ssä, joten A on suljettu myös Y:ssä (Esimerkki 7.8.2); täten $\mathrm{cl}_Y A = A$, jossa $\mathrm{cl}_Y A$ tarkoittaa joukon $A \subset Y$ sulkeumaa avaruudessa Y. Siis $A = \operatorname{int}_Y A \cup \partial_Y A$.

Tarkastellaan pistettä $z = (x, y) \in A$. Jos $z \in A_1$, niin $z \in \operatorname{int}_X A \subset \operatorname{int}_Y A$. Jos sitten $z \in A_2$ ja $0 < r < x$ tai $z \in A_3$ ja $0 < r < y$, niin $B(z, r) \cap Y = B(z, r) \cap Y_1 \subset Y_1 \subset A$, joten $z \in \operatorname{int}_Y A$. Jos vihdoin $z \in A_4 \cup A_5$ ja $r > 0$, niin $(-r/2, y) \in (B(z, r) \cap Y) \setminus A$ ja toisaalta $B(z, r) \cap Y$ kohtaa myös A:n (nimittäin z:ssa), joten $z \in \partial_Y A$. Täten $\operatorname{int}_Y A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ ja $\partial_Y A = A_4 \cup A_5$.

Huom. Voidaan myös huomata, että joukko $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{(x, y) \in Y \mid x + y > 0\}$ on avoin Y:ssä, joten $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \subset \operatorname{int}_Y A$.

Nähdään siis, että tehtävissä 2 ja 3 on $\partial_Y A \subset \partial_X A$. Tämä ei ole sattumaa, sillä:

Tulos. *Olkoon* X *metrinen avaruus ja* $A \subset Y \subset X$ *joukkoja. Tällöin* $\partial_Y A \subset \partial_X A$.

Tod. 1. $\partial_Y A = \mathrm{cl}_Y A \cap \mathrm{cl}_Y(Y \setminus A) = (\overline{A} \cap Y) \cap (\overline{Y \setminus A} \cap Y) \subset \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \partial_X A$ (Lause 8.3(5)). ■

Tod. 2. Olkoon $x \in \partial_Y A$. Jos $r > 0$, niin $a, a' \in B(x, r) \cap Y$ joillain $a \in A$ ja $a' \in Y \setminus A$, jolloin $a \in B(x, r) \cap A$ ja $a' \in B(x, r) \setminus A$. Siis $x \in \partial_X A$. ■

Teht. 4. (7:7) *Olkoon* A, $B \subset X$ *ja* $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$*. Osoita, että* A *ja* B *ovat avoimia ja suljettuja joukkoja avaruudessa* $A \cup B$*, tämä varustettuna luonnollisesti* X*:stä periytyvällä indusoidulla metriikalla.*

Täytyykö A ja B:n olla avoimia tai suljettuja joukkoja avaruudessa X?

Ratk. Nyt $\mathrm{cl}_{A\cup B} A = \overline{A} \cap (A \cup B) = (\overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup \emptyset = A$, joten A on suljettu avaruudessa $A \cup B$. Oletuksista seuraa, että $A \cap B = \emptyset$, joten $B = (A \cup B) \setminus A$. Tästä seuraa, että B on avoin joukko avaruudessa $A \cup B$. Samoin B on suljettu ja A avoin avaruudessa $A \cup B$.

Seuraava **esimerkki** osoittaa, että vastaus tehtävän kysymykseen on kielteinen. Olkoon $X = \mathbb{R}$, $A = [0,1[$ ja $B =]1,2]$. Tällöin $\overline{A} = [0,1]$ ja $\overline{B} = [1,2]$. Siis $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset$, mutta kumpikaan joukoista A ja B ei ole avoin eikä suljettu avaruudessa X. Tämä esimerkki on (tarkoituksellisesti) sikäli epätriviaali, että nyt $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

Teht. 5. *Olkoon $A \subset X$, ja olkoon $f\colon X \to Y$ kuvaus, jonka rajoittuma $f|A$ on jatkuva sisäpisteessä $a \in \operatorname{int} A$. Osoita, että myös f, kuvauksena $f\colon X \to Y$, on jatkuva pisteessä a.*

Muotoile alkuosan perusteella jatkuvuustulos, joka koskee kuvausta $f\colon X \to Y$ ja X:n avoimia osajoukkoja U_i, $i \in I$, joilla $\bigcup_{i\in I} U_i = X$.

Ratk. Olkoon V pisteen $f(a)$ ympäristö. Tällöin löytyy sellainen a:n ympäristö U_0 joukossa A, että $fU_0 \subset V$. Valitaan sellainen avoin joukko U_1 avaruudessa X, että $U_0 = U_1 \cap A$. Nyt $U = U_1 \cap \operatorname{int} A$ on a:n ympäristö X:ssä, ja $U \subset U_1 \cap A = U_0$, joten $fU \subset fU_0 \subset V$. Siis f on jatkuva pisteessä a.

Vaihtoehtoinen tod. Huomataan ensin, että myös rajoittuma $f|\operatorname{int} A = (f|A)|\operatorname{int} A$ on jatkuva a:ssa (Lause 7.11). Olkoon V pisteen $f(a)$ ympäristö. Tällöin löytyy sellainen a:n ympäristö U joukossa $\operatorname{int} A$, että $fU \subset V$. Koska $\operatorname{int} A$ on avoin X:ssä, myös U on avoin X:ssä (Lause 7.4). Siis U on a:n ympäristö X:ssä. Täten f on jatkuva a:ssa.

Saadaan **jatkuvuustulos**, että jos $f\colon X \to Y$ on kuvaus, $(U_i)_{i\in I}$ perhe X:n avoimia osajoukkoja, $\bigcup_{i\in I} U_i = X$ ja $f|U_i$ jatkuva jokaisella $i \in I$, niin f on jatkuva. Nimittäin, jos $x \in X$, niin $x \in U_i$ jollain $i \in I$, joten, koska $f|U_i$ on jatkuva ja $U_i = \operatorname{int} U_i$, niin f on jatkuva pisteessä x.

Teht. 6. *Osoita, että $[0,\infty[\approx]-\infty,a]$, jossa a on vakio ja tavallinen euklidinen metriikka on käytössä.*

Ohje. Konstruoi tarvittava homeomorfismi ja perustele kyseinen kuvaus homeomorfismiksi.

Ratk. Määritellään kuvaus $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a - x$. Tällöin $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = a - (a - x) = x$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Siis f on bijektio ja $f^{-1} = f$. Nyt f ja f^{-1} ovat polynomeina jatkuvia. Siis f on homeomorfismi.

Huomataan, että jos $x \in \mathbb{R}$ ja $x \geq 0$, niin $f(x) = a - x \leq a$, ja jos $y \in \mathbb{R}$ ja $y \leq a$, niin $x = f^{-1}(y) = a - y \geq 0$ ja $y = f(x)$. Siis $f[0,\infty[=]-\infty,a]$. Näin ollen f määrittelee homeomorfismin $f_1\colon [0,\infty[\to]-\infty,a]$, $x \mapsto f(x) = a - x$.

Vaihtoehtoisesti määritellään suoraan kuvaukset $f\colon [0,\infty[\to]-\infty,a]$, $x \mapsto a - x$, ja $g\colon]-\infty,a] \to [0,\infty[$, $x \mapsto a - x$. Tällöin $g(f(x)) = a - (a - x) = x$ kaikilla $x \geq 0$ ja $f(g(x)) = a - (a - x) = x$ kaikilla $x \leq a$, joten $g \circ f = \mathrm{id}_{[0,\infty[}$ ja $f \circ g = \mathrm{id}_{]-\infty,a]}$. Siis f on bijektio ja $f^{-1} = g$ sen käänteiskuvaus. Koska f ja f^{-1} ovat polynomien rajoittumina jatkuvia, on f homeomorfismi.