Topologia I, harjoitus 5, 20.–23.2.2012, ratkaisut (Jouni Luukkainen), 2 sivua

Teht. 1. *Tutki, ovatko seuraavat euklidisen tason* $\mathbb{R}^2$ *osajoukot suljettuja:*
(a) $A_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1/(k+1) \le |(x, y)| \le 1/k\}$, *kun* $k \in \mathbb{N}$; **(b)** $A = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$.
Jos ei, niin määritä sulkeuma.

Ohje. Jatkuvat kuvaukset; sulkeumaksi osoittamisessa on hyötyä Lauseen 6.8 kohdasta (4).

Ratk. (a) Euklidinen normi $f = |\cdot|: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on jatkuva kuvaus; itse asiassa jokaiselle normiavaruudelle E normi $\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}$ on jopa 1-Lipschitz kolmioepäyhtälön seuraustuloksen $|\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|\ \forall x, y \in E$ tähden. Olkoon $k \in \mathbb{N}$. Tällöin suljettu väli $I_k = [1/(k+1), 1/k]$ on $\mathbb{R}$:n suljettu osajoukko, joten joukko $A_k = f^{-1}I_k$ on suljettu tasossa $\mathbb{R}^2$ (Lause 6.13).

(b) Selvästi $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |(x, y)| \le 1\} = \overline{B}^2(\mathbf{0}, 1) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Jos $0 < r < 1$, niin $(r/2, 0) \in A \cap B^2(\mathbf{0}, r)$, joten $A \cap B^2(\mathbf{0}, r) \ne \emptyset$; täten $\mathbf{0} \in \overline{A}$. Koska siis $A \ne \overline{A}$, niin A ei ole suljettu (Lause 6.8(6)). Toisaalta suljettu yksikkökiekko $\overline{B}^2(\mathbf{0}, 1)$ on tason $\mathbb{R}^2$ suljettu osajoukko, ja $\overline{B}^2(\mathbf{0}, 1) = A \cup \{\mathbf{0}\}$. Näin ollen $\overline{B}^2(\mathbf{0}, 1)$ on suppein $\mathbb{R}^2$:n suljettu osajoukko, joka sisältää joukon A. Siis $\overline{A} = \overline{B}^2(\mathbf{0}, 1)$ (Lause 6.8(4)).

Teht. 2. *Onko* $\mathbb{R}^2$*:n osajoukko* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y = \sin(1/x)\}$ *suljettu, ja jos ei ole, mikä on sen sulkeuma* $\overline{A}$*? Mitkä pisteet ovat kasautumispisteitä? Todistusta ei tässä haeta, lyhyt vastaus riittää.*

Ohje. Hahmottele kuva. Mihin kasautuvat pisteet $(x_k, \sin(1/x_k)) \in A$, joissa $x_k = 1/(\pi/2 + k\pi)$ ja $k \in \mathbb{N}$ on parillinen tai pariton? Bolzanon lause.

Ratk. On ilmeistä, että $\overline{A}$ saadaan lisäämällä joukkoon A jana $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, -1 \le y \le 1\}$. Mutta osoitetaan tämä tarkasti.

Olkoon $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, -1 \le y \le 1\}$. Kuvaus $\varphi: S \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y - \sin(1/x)$, on jatkuva ja $A = \varphi^{-1}\{0\}$, joten A on suljettu joukossa S (Lause 6.13). Täten $A = \mathrm{cl}_S A = \overline{A} \cap S$ (Lause 6.8(6) ja Lause 7.6). Joukko $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0, -1 \le y \le 1\}$ on suljettu tasossa $\mathbb{R}^2$, sillä $T = \mathrm{pr}_1^{-1}[0, \infty[\cap \mathrm{pr}_2^{-1}[-1, 1]$. Voidaan siis päätellä, että $\overline{A} \subset T$ ja siis $\overline{A} = \overline{A} \cap T = \overline{A} \cap (S \cup J) \subset (\overline{A} \cap S) \cup J = A \cup J$.

Osoitetaan vaihtoehtoisella tavalla, että $\overline{A} \subset A \cup J$. Tätä varten riittää osoittaa, että $A \cup J$ on suljettu, ja tätä varten taas, että $\complement(A \cup J)$ on avoin. Olkoon $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ ja $\psi: U \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto y - \sin(1/x)$, jolloin ψ on jatkuva. Nyt $\complement(A \cup J) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -1 \text{ tai } y > 0\} \cup \psi^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$ on avointen joukkojen yhdiste, sillä myös joukko $\psi^{-1}[\mathbb{R} \setminus \{0\}]$ on avoin avoimen joukon U avoimena osajoukkona (Lause 7.4); täten $\complement(A \cup J)$ on avoin.

Osoitetaan, että $J \subset \overline{A}$. Määritellään jatkuva kuvaus $f:]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(1/x)$. Kun $k \in \mathbb{N}$, niin $f(x_k) = \sin(\pi/2 + k\pi)$, joten $f(x_k) = \sin(\pi/2) = 1$, jos k on parillinen, ja $f(x_k) = \sin(3\pi/2) = -1$, jos k on pariton. Olkoon nyt $y \in [-1, 1]$. Tällöin Bolzanon lauseen (Analyysi I) nojalla kullakin $k \in \mathbb{N}$ on olemassa piste $t_k \in [x_{k+1}, x_k]$, jolla $y = f(t_k)$ ja siis $(t_k, y) = (t_k, f(t_k)) \in A$. Olkoon $r > 0$. Koska $x_k \to 0$, kun $k \to \infty$, niin on olemassa $k \in \mathbb{N}$, jolla $x_k < r$; tällöin $|(t_k, y) - (0, y)| = t_k \le x_k < r$. Siis $B((0, y), r) \cap A \ne \emptyset$. Täten $(0, y) \in \overline{A}$.

Näin ollen $\overline{A} = A \cup J$. Koska $\overline{A} \ne A$, niin A ei ole suljettu.

Selvästikään A:ssa ei ole erakkopisteitä. Mutta osoitetaan tämäkin. Olkoon $z_0 = (x_0, f(x_0)) \in A$. Tällöin f:n jatkuvuuden nojalla kullakin $r > 0$ voidaan valita $x > 0$, jolla $0 < |x - x_0| < r/\sqrt{2}$ ja $|f(x) - f(x_0)| < r/\sqrt{2}$, jolloin pisteelle $z = (x, f(x)) \in A$ on $0 < |z - z_0| < r$. Täten z_0 ei ole A:n erakkopiste vaan A:n kasautumispiste. Siis $\overline{A}$ on myös A:n kasautumispisteiden joukko (Lause 6.21).

Teht. 3. (6:12) *Olkoot* $f, g: X \to Y$ *jatkuvia kuvauksia ja* $A \subset X$ *sellainen joukko, että* $f|A = g|A$. *Osoita, että* $f|\overline{A} = g|\overline{A}$.

Ratk. Tehdään vastaoletus, että $f(a) \ne g(a)$ jollain $a \in \overline{A}$. Merkitään $r = d(f(a), g(a)) > 0$. Kuvausten f ja g jatkuvuuden tähden on olemassa a:n ympäristöt $U_1, U_2 \subset X$, joilla $fU_1 \subset B(f(a), r/2)$ ja $gU_2 \subset B(g(a), r/2)$. Tällöin $U = U_1 \cap U_2$ on a:n ympäristö. Koska $a \in \overline{A}$, löytyy $x \in U \cap A$. Tällöin $f(x) = g(x)$, joten kolmioepäyhtälön nojalla saamme ristiriidan

$$r = d(f(a), g(a)) \le d(f(a), f(x)) + d(g(x), g(a)) < r/2 + r/2 = r.$$

Teht. 4. (6:8) *Olkoon* E *sisätuloavaruus ja* $A \subset E$. *Osoita, että* A*:n ortokomplementti* $A^\perp = \{x \in E \mid \langle x, a\rangle = 0$ *kaikilla* $a \in A\}$ *on suljettu* E*:ssä. Siten* $A^\perp$ *on* E*:n suljettu vektorialiavaruus* (harj. 1, teht. 4).

Ohje. Sisätulo on jatkuva. Esitä $A^\perp$ vaikka leikkauksena.

Ratk. Olkoon $a \in E$. Määritellään kuvaus $f_a \colon E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, a \rangle$. Tällöin Schwarzin epäyhtälön nojalla on

$$|f_a(x) - f_a(y)| = |\langle x, a \rangle - \langle y, a \rangle| = |\langle x - y, a \rangle| \le |x - y||a| \quad \forall x, y \in E,$$

joten f_a on Lipschitz ja siis jatkuva. Täten joukko $\{a\}^\perp = f_a^{-1}\{0\}$ on suljettu E:ssä.

Nyt esityksestä $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp$ nähdään, että $A^\perp$ on suljettu E:ssä (Lause 6.3(1)).

Teht. 5. (7:3 osa) *Muodosta joukon $A \subset B^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ sulkeuma avaruudessa B^2, kun*
(a) $A = \{(x,0) \in B^2 \mid -1 < x < 1\}$, **(b)** $A = \{(x,y) \in B^2 \mid x + y > 0\}$.
Mitkä A:t ovat suljettuja B^2:ssa?

Ohje. Ehkä ensin sulkeuma $\mathbb{R}^2$:ssa.

Ratk. **(a)** Projektiokuvauksen $\mathrm{pr}_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto y$, jatkuvuuden tähden joukko $\mathrm{pr}_2^{-1}\{0\}$ on suljettu tasossa $\mathbb{R}^2$, joten esityksen $A = B^2 \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} = B^2 \cap \mathrm{pr}_2^{-1}\{0\}$ perusteella joukko A on suljettu avaruudessa B^2 (Lause 7.7). Täten joukon A sulkeuma avaruudessa on $\mathrm{cl}_{B^2} A = A$.

Vaihtoehtoisesti nähdään, että koska $A = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < x < 1\}$, niin $\overline{A} = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1\}$, joten $A = \overline{A} \cap B^2 = \mathrm{cl}_{B^2} A$, ja A on siis suljettu avaruudessa B^2.

(b) Olkoon $A_1 = \{(x,y) \in B^2 \mid x + y \ge 0\}$ ja $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |(x,y)| \le 1, x + y \ge 0\}$. Tällöin ilmeisesti $\mathrm{cl}_{B^2} A = A_1$ ja $\overline{A} = A_2$, jolloin todellakin $\mathrm{cl}_{B^2} A = \overline{A} \cap B^2$ ja A ei ole suljettu joukossa B^2.

Osoitetaan, että $\mathrm{cl}_{B^2} A \subset A_1$. Kuvaus $s \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x + y$, on jatkuva, joten joukko $s^{-1}[0,\infty[$ on suljettu. Koska $A_1 = B^2 \cap s^{-1}[0,\infty[$, niin A_1 on suljettu joukossa B^2. Koska $A \subset A_1$, niin täten $\mathrm{cl}_{B^2} A \subset A_1$.

Osoitetaan, että myös $A_1 \subset \mathrm{cl}_{B^2} A$. Olkoon $z = (x,y) \in A_1 \setminus A$ eli $|z| < 1$ ja $x + y = 0$. Olkoon $r > 0$. Oletetaan, että $r < 1 - |z|$. Olkoon $z' = (x + r/2, y + r/2)$. Tällöin $|z' - z| = (r/2)\sqrt{2} < r < 1 - |z|$, joten $|z'| \le |z' - z| + |z| < 1$, ja $x' + y' = r > 0$. Siis $z' \in B(z,r) \cap A$. Täten $z \in \mathrm{cl}_{B^2} A$.

Osoitetaan, että $\overline{A} \subset A_2$. Selvästi $A_2 = \overline{B}^2(\mathbf{0},1) \cap s^{-1}[0,\infty[$ on suljettu tasossa $\mathbb{R}^2$. Siis $\overline{A} \subset A_2$.

Osoitetaan, että myös $A_2 \subset \overline{A}$. Olkoon $z = (x,y) \in A_2 \setminus A_1$ eli $|z| = 1$ ja $x + y \ge 0$. Halutaan osoittaa, että $z \in \overline{A}$. Oletetaan ensin, että $x + y > 0$. Jos $0 < r < 1$, niin pisteelle $z' = (x',y') = (1 - r/2)z$ pätee $|z' - z| = r/2 < r$, $|z'| = 1 - r/2 < 1$ ja $x' + y' = (1 - r/2)(x + y) > 0$, joten $z' \in B(z,r) \cap A$. Oletetaan sitten, että $x + y = 0$ ja $x > 0$. Jos $0 < r < x$, niin pisteelle $z' = (x',y') = (x, y + r/2)$ pätee $|z' - z| = r/2 < r$, $|z'| < |z| = 1$, sillä $y < y' < 0$, ja $x' + y' = r/2 > 0$, joten $z' \in B(z,r) \cap A$. Oletetaan lopuksi, että $x + y = 0$ ja $x < 0$. Jos $0 < r < |x|$, niin pisteelle $z' = (x',y') = (x + r/2, y)$ pätee $|z' - z| = r/2 < r$, $|z'| < |z| = 1$, sillä $x < x' < 0$, ja $x' + y' = r/2 > 0$, joten $z' \in B(z,r) \cap A$. Siis kaikissa kolmessa tapauksessa on $z \in \overline{A}$.

Teht. 6. *Olkoon kuvaus $f \colon [-1,2] \to \mathbb{R}$ määritelty yhtälöllä*

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \textit{kun } -1 \le x \le 0, \\ -2x^2 + x + 1, & \textit{kun } 0 < x \le 1, \\ x^3 - x, & \textit{kun } 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Osoita, että se on jatkuva.

Ohje. Lause 7.13.

Ratk. Sijoittamalla nähdään, että $(-2x^2 + x + 1)\big|_{x=0} = -2 \cdot 0^2 + 0 + 1 = 1 = (-x + 1)\big|_{x=0} = f(0)$ ja $(x^3 - x)\big|_{x=1} = 0 = (-2x^2 + x + 1)\big|_{x=1} = f(1)$. Täten

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{kun } -1 \le x \le 0, \\ -2x^2 + x + 1, & \text{kun } 0 \le x \le 1, \\ x^3 - x, & \text{kun } 1 \le x \le 2. \end{cases}$$

Näin ollen f:n määrittelyjoukko voidaan esittää äärellisenä yhdisteenä $[-1,2] = [-1,0] \cup [0,1] \cup [1,2]$ väleistä $[-1,0]$, $[0,1]$ ja $[1,2]$, jotka ovat suljettuja joukkoja $\mathbb{R}$:ssä ja siis myös välin $[-1,2]$ relatiivitopologiassa ja joille f:n rajoittumat $f|[-1,0]$, $f|[0,1]$ ja $f|[1,2]$ ovat polynomeina jatkuvia. Täten f on jatkuva (Lause 7.13).