Topologia I - Kevät 2012
Harjoitus 4, Ratkaisuehdotuksia
Risto Hovila

1. (4:5). Olkoot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ Lipschitz-kuvauksia L-vakioina M ja N. Osoita, että yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on MN-Lipschitz.

Ratkaisu. Merkitään avaruuden X metriikkaa $d_X : X \times X \to \mathbb{R}_+$, avaruuden Y metriikkaa $d_Y : Y \times Y \to \mathbb{R}_+$ ja avaruuden Z metriikkaa $d_Z : Z \times Z \to \mathbb{R}_+$. Koska f on M-Lipschitz ja g on N-Lipschitz, saadaan kaikilla $x, y \in X$

$$\begin{aligned} d_Z\big((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)\big) &= d_Z\big(g(f(x)), g(f(y))\big) \\ &\le N d_Y(f(x), f(y)) \le N(M d_X(x, y)) = NM d_X(x, y), \end{aligned}$$

joten kuvaus $g \circ f$ on MN-Lipschitz.

2. Olkoon $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ funktio $f(x) = x^2/2 - x^3/3$. Määritä väliarvolauseen avulla jokin sellainen $M \ge 0$, että f on M-Lipschitz.

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in [-2, 2], x \ne y$. Tarvittaessa merkintöjä vaihtamalla voidaan olettaa, että $x < y$. Väliarvolauseen nojalla

$$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x - y) \text{ jollain } \xi \in (x, y).$$

Nyt jokaisella $t \in [-2, 2]$

$$|f'(t)| = |t - t^2| = |t||1 - t| \le 2|1 - (-2)| = 6,$$

joten

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y| \le 6|x - y|.$$

Siis f on 6-Lipschitz.

3. Olkoon $(E, | * |)$ normiavaruus, ja olkoot x ja y kaksi kiinnitettyä E:n pistettä. Yhtälö

$$h(t) = (1 - t)x + ty, \text{ kun } t \in [0, 1],$$

määrittelee kuvauksen $h : [0, 1] \to E$, joka piirtää pisteitä x ja y yhdistävän janan E:ssä. Osoita että h on jatkuva.

Ratkaisu. Olkoot $t, s \in [0, 1]$. Merkitään $M = |x - y|$. Nyt

$$\begin{aligned} |h(t) - h(s)| &= |(1 - t)x + ty - ((1 - s)x + sy)| = |x - tx - x + sx + ty - sy| \\ &= |(s - t)x - (s - t)y| = |(s - t)(x - y)| \\ &= |t - s||x - y|, \end{aligned}$$

joten erityisesti $|h(t) - h(s)| \le M|t - s|$. Siispä h on M-Lipschitz ja siten jatkuva.

Tässä voitaisiin käyttää myös Väisälän kirjan Lauseita 5.2 ja 5.3: Kuvaukset

$$\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}, \alpha(t) = 1 - t, \quad \text{ja} \quad \beta : [0, 1] \to \mathbb{R}, \beta(t) = t,$$

ovat jatkuvia. Lisäksi kuvaukset

$$f : [0, 1] \to E, f(t) = x, \quad \text{ja} \quad g : [0, 1] \to E, g(t) = y,$$

ovat vakiokuvauksia ja siten jatkuvia. Näin ollen kuvaus

$$h = \alpha f + \beta g$$

on jatkuva.

4. (4:4, osapuilleen). Olkoon $E = C([0,1],\mathbb{R})$ varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Jokaista $f \in E$ kohti yhtälö

$$\alpha(f)(x) = 5xf(x) \quad \text{kaikilla } x \in [0,1]$$

määrittelee kuvauksen $\alpha(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$.

(a) Osoita että $\alpha(f)$ on jatkuva, ts. $\alpha(f) \in E$.

(b) Kohdan (a) mukaan saadaan kuvaus $\alpha : E \to E, f \mapsto \alpha(f)$. Todista että α on jatkuva.

(c) Todista että α on Lipschitz.

Ohje. Kohdassa (a) Väisälän luku 5.

Ratkaisu. **(a)** Olkoon $f \in E$, jolloin siis f on jatkuva kuvaus $[0,1] \to \mathbb{R}$. Kuvaus $b : [0,1] \to \mathbb{R}, b(x) = 5x$, on myös jatkuva, joten Väisälän kirjan lauseen 5.3 nojalla $\alpha(f) = bf$ on jatkuva kuvaus $[0,1] \to \mathbb{R}$.

(b) Olkoon $f \in E$ ja $\epsilon > 0$. Valitaan $\delta = \epsilon/5 > 0$. Nyt kaikilla $g \in E$, joilla $||g-f||_\infty < \delta$, pätee

$$\begin{aligned}
||\alpha(g) - \alpha(f)||_\infty &= \sup_{x\in[0,1]} |\alpha(g)(x) - \alpha(f)(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |5xg(x) - 5xf(x)| \\
&= \sup_{x\in[0,1]} 5x|g(x) - f(x)| \leq 5 \sup_{x\in[0,1]} |g(x) - f(x)| \\
&= 5||g-f||_\infty < 5\delta = 5\epsilon/5 = \epsilon,
\end{aligned}$$

joten α on jatkuva pisteessä f. Koska f oli mielivaltainen, on kuvaus α jatkuva kaikkialla.

(c) Samoin kuin (b)-kohdassa nähdään, että

$$||\alpha(g) - \alpha(f)||_\infty \leq 5||g-f||_\infty \text{ kaikilla } f,g \in E,$$

joten α on 5-Lipschitz.

5. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbb{R}^2$ osajoukkoa

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x < y < 2x\}.$$

Osoita että A on avoin joukko.

Ohje. Muista jatkuvat kuvaukset ja luku 5.

Ratkaisu. Määritellään kuvaukset $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x,y) = x^2 - x - y \text{ ja } g(x,y) = 2x - y.$$

Projektiokuvaukset $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathrm{pr}_1(x,y) = x$, ja $\mathrm{pr}_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \mathrm{pr}_2(x,y) = y$, ovat jatkuvia (Lause 5.6). Kuvaukset f ja g koostuvat niiden skalaarikerrannaisten summista ja tuloista ja ovat näin ollen jatkuvia (Lauseet 5.2 ja 5.3). Lisäksi joukot $(-\infty,0) \subset \mathbb{R}$ ja $(0,\infty) \subset \mathbb{R}$ ovat avoimia, joten alkukuvat $f^{-1}(-\infty,0)$ ja $g^{-1}(0,\infty)$ ovat myös avoimia (Lause 4.8). Näin ollen

$$\begin{aligned}
A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x < y < 2x\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x - y < 0 \text{ ja } 2x - y > 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - x - y < 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y > 0\} \\
&= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) < 0\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) > 0\} \\
&= f^{-1}(-\infty,0) \cap g^{-1}(0,\infty)
\end{aligned}$$

on kahden avoimen joukon leikkauksena avoin.

6. Olkoot $f, g : X \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita. Osoita että tällöin myös
(a) maksimifunktio $h : X \to \mathbb{R}$, jossa $x \mapsto h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, on jatkuva,
(b) itseisarvofunktio $|f| : X \mapsto \mathbb{R}$, jossa $x \mapsto |f|(x) = |f(x)|$, on jatkuva.
Ohjeita. (a) Kiinnitä $a \in X$, jolloin voit olettaa $h(a) = f(a)$, ja saat a:n tarvittavan ympäristön kahden ympäristön leikkauksena. (b) Käytä kohtaa (a).

Ratkaisu. (a) Olkoon $a \in X$. Osoitetaan, että h on jatkuva a:ssa. Nyt voidaan olettaa, että $f(a) \geq g(a)$, jolloin $h(a) = f(a)$. Olkoon $\epsilon > 0$. Koska f ja g ovat jatkuvia, on olemassa pisteen a ympäristöt $U, V \subset X$ siten, että

$$|f(x) - f(a)| < \epsilon \text{ kaikilla } x \in U$$

ja

$$|g(x) - g(a)| < \epsilon \text{ kaikilla } x \in V.$$

Tällöin $W = U \cap V$ on pisteen a ympäristö. Nyt kaikilla $x \in W$ on

$$f(x) < f(a) + \epsilon = h(a) + \epsilon \text{ ja } g(x) < g(a) + \epsilon \leq h(a) + \epsilon,$$

joten

$$h(x) < h(a) + \epsilon, \text{ ja } h(x) \geq f(x) > f(a) - \epsilon = h(a) - \epsilon,$$

jolloin $|h(x) - h(a)| < \epsilon$.

II tapa: Olkoon $a \in X$. Osoitetaan, että h on jatkuva a:ssa. Tarkastellaan ensin tapausta $f(a) = g(a)$. Olkoon V on pisteen $h(a)$ ympäristö. Kuvausten f ja g jatkuvuuden nojalla on olemassa pisteen a ympäristöt U_1 ja U_2 siten, että $fU_1 \subset V$ ja $gU_2 \subset V$. Tällöin $U = U_1 \cap U_2$ on pisteen a ympäristö ja $h(x) \in V$ aina, kun $x \in U$. Siis $hU \subset V$.

Tarkastellaan sitten tapausta $f(a) \neq g(a)$. Nyt voidaan olettaa, että $f(a) > g(a)$. Olkoon $r = (f(a) - g(a))/2 > 0$. Kuvausten f ja g jatkuvuuden nojalla on olemassa pisteen a ympäristö U siten, että

$$|f(x) - f(a)| < r \text{ ja } |g(x) - g(a)| < r \text{ aina, kun } x \in U.$$

Jos nyt $x \in U$, niin

$$f(x) > f(a) - r = g(a) + r > g(x),$$

joten $h(x) = f(x)$. Siis $h|_U = f|_U$, joten $h|_U$ on jatkuva pisteessä a. Koska U on pisteen a sisältävä avoin joukko, niin täten h on jatkuva pisteessä a.

(b) Jokaisella $x \in \mathbb{R}$ pätee, että $|x| = \max\{x, -x\}$. Näin ollen

$$|f|(x) = |f(x)| = \max\{f(x), -f(x)\} \text{ kaikilla } x \in X.$$

Koska f on jatkuva, niin myös $-f$ on jatkuva. Siis (a)-kohdan nojalla itseisarvofunktio $|f|$ on jatkuva.

Huom. Tehtävän voisi ratkaista myös näin: (b)-kohdassa itseisarvofunktio $|f| = |*| \circ f$, on jatkuvista kuvauksista yhdistettynä kuvauksena jatkuva (Lause 4.12). (a)-kohdassa havaitaan, että maksimifunktio voidaan kirjoittaa muodossa $h = (f + g + |f - g|)/2$, joka on jatkuvista kuvauksista muodostettuna kuvauksena jatkuva.