Topologia I, harjoitus 3, 6.–9.2.2012, ratkaisut (Jouni Luukkainen), 1 sivu

Teht. 1. (2:12) *Olkoon* $E = \mathrm{raj}([0,1],\mathbb{R})$ *varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Määritä* $d(A)$*, kun* $A = \{f_n : [0,1] \to \mathbb{R} \mid f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\}$.

Ohje. Piirrä kuvaajia. Mikä on $\lim_{n\to\infty}(x - x^n)$, kun $0 \le x < 1$?

Ratk. On siis määritettävä joukon A halkaisija $d(A) = \sup\{d(f_m, f_n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

Olkoon $m, n \in \mathbb{N}$, $m \le n$. Tällöin $|f_m(x) - f_n(x)| = x^m - x^n \le 1 - 0 = 1$ kaikilla $x \in [0,1]$. Siis $d(f_m, f_n) \le 1$. Täten $d(A) \le 1$.

Olkoon $x \in [0,1[$. Tällöin $d(A) \ge d(f_n, f_1) \ge |f_n(x) - f_1(x)| = |x^n - x| = x - x^n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Koska $\lim_{n\to\infty}(x - x^n) = x - 0 = x$, tästä seuraa, että $d(A) \ge x$. Täten $d(A) \ge \sup[0,1[= 1$.

Näin ollen $d(A) = 1$.

Teht. 2. *Mitkä seuraavista* $\mathbb{R}^2$*:n osajoukoista ovat avoimia:*

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 2y^2\}$, **(b)** $B = A^c$, **(c)** $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin x^2 < y\}$?

Lyhyt vastaus riittää, ei perusteluja.

Ratk. **(a)** A ei ole avoin. **(b)** B on avoin. **(c)** C on avoin.

Teht. 3. (3:3) *Olkoon* X *metrinen avaruus,* $G \subset X$ *avoin ja* $F \subset X$ *äärellinen. Osoita, että joukko* $G \setminus F$ *on avoin.*

Ratk. Joukko $X \setminus \{a\} \subset X$ on avoin kaikilla $a \in F$ (Esimerkki 3.3.2). Täten joukko $X \setminus F = \bigcap_{a\in F}(X \setminus \{a\})$ on avoin, sillä äärellisen monen avoimen joukon leikkaus on avoin (Lause 3.5; huomaa, että myös X:n avointen joukkojen tyhjän perheen leikkaus, X, on avoin). Täten kahden avoimen joukon leikkauksena joukko $G \setminus F = G \cap (X \setminus F)$ on avoin.

Teht. 4. *Olkoon* X *metrinen avaruus, kuvaus* $f : X \to \mathbb{R}$ *olkoon jatkuva pisteessä* $a \in X$ *ja* $f(a) > 0$*. Osoita, että* a*:lla on ympäristö* $U \subset X$*, jossa kaikilla* x *pätee* $f(x) > f(a)/2$.

Ratk. Olkoon $\varepsilon = f(a)/2$, jolloin $\varepsilon > 0$. Koska f on jatkuva pisteessä a, niin a:lla on sellainen ympäristö $U \subset X$, että $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ kaikilla $x \in U$. Nyt, jos $x \in U$, niin $f(a) - f(x) \le |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ja siis $f(x) > f(a) - \varepsilon = f(a) - f(a)/2 = f(a)/2$.

Teht. 5. (4:8, osa) *Olkoon*

$$f(\mathbf{0}) = 0 \qquad \text{ja} \qquad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{kun } (x,y) \ne \mathbf{0}.$$

Osoita, että näin määritelty funktio $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *on epäjatkuva origossa.*

Ratk. Valitaan $\varepsilon = 1/2 > 0$. Olkoon $\delta > 0$. Valitaan sellainen $y > 0$, jolla $y < \min(1, \delta/\sqrt{2})$. Tällöin $|(y^2, y) - \mathbf{0}| = \sqrt{y^4 + y^2} \le \sqrt{y^2 + y^2} = \sqrt{2y^2} < \sqrt{\delta^2} = \delta$. Mutta

$$|f(y^2, y) - f(\mathbf{0})| = \left| \frac{y^2 y^2}{y^4 + y^4} - 0 \right| = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Siis $fB(\mathbf{0}, \delta) \not\subset B(f(\mathbf{0}), \varepsilon)$. Täten f on epäjatkuva $\mathbf{0}$:ssa.

Teht. 6. *Tarkastellaan jatkuvien funktioiden avaruutta* $E = C([0,1],\mathbb{R})$ *varustettuna supnormilla* $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ *(tässä* sup *on tunnetusti* max*) ja tämän luomalla metriikalla. Mitkä seuraavista joukoista ovat avoimia* E*:ssä (perustelu)?*

(a) $A = \{f \in E : \|f\|_\infty > 0\}$, **(b)** $B = \{f \in E \mid f(x) > 0\, \forall x \in [0,1]\}$, **(c)** $C = \{f \in E \mid f(1/n) > 0\, \forall n \in \mathbb{N}\}$.

Ohje. (a) Komplementti, (b) jatkuva funktio $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ saavuttaa maksiminsa ja miniminsä, (c) eräs sopiva $f \in C$.

Ratk. **(a)** Nyt $A = E \setminus \{f \in E : \|f\|_\infty = 0\} = E \setminus \{\mathbf{0}\}$ on <u>avoin</u>.

(b) Olkoon $f \in B$. Tällöin on olemassa $m = \min\{f(x) \mid x \in [0,1]\}$. Koska m on siis f:n arvo, on $m > 0$. Olkoon $g \in B(f, m)$. Tällöin kaikilla $x \in [0,1]$ on $f(x) - g(x) \le \|f - g\|_\infty < m$ ja siis $g(x) > f(x) - m \ge 0$. Täten $g \in B$. Siis $B(f, m) \subset B$. Näin ollen B on <u>avoin</u>.

(c) Määritellään $f \in E$ asettamalla $f(x) = x\ \forall x \in [0,1]$. Tällöin $f(1/n) = 1/n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, joten $f \in C$. Olkoon $r > 0$. Määritellään $g \in E$ asettamalla $g(x) = f(x) - r/2\ \forall x \in [0,1]$. Tällöin $|g(x) - f(x)| = r/2$ $\forall x \in [0,1]$, joten $\|g - f\|_\infty = r/2 < r$ ja siis $g \in B(f, r)$. Mutta valitsemalla niin suuri $n \in \mathbb{N}$, että $1/n \le r/2$, on $g(1/n) = 1/n - r/2 \le 0$, joten $g \notin C$. Siis $B(f, r) \not\subset C$. Täten C <u>ei ole avoin</u>.