Topologia I, harjoitus 2, 30.1.–2.2.2012, ratkaisut (Jouni Luukkainen), 3 sivua

Teht.1. (1:7, osa) *Tarkastellaan* $\mathbb{R}^n$*:n normeja* $|x|$ = *tavallinen euklidinen normi,* $|x|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$ *ja* $|x|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. *Osoita, että*

(a) $|x|_\infty \le |x| \le |x|_1 \le n|x|_\infty$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$,

(b) $|x|_1 \le \sqrt{n}|x|$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}^n$.

Ohje. Kohdan (a) keskimmäisessä epäyhtälössä kirjoita $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ja sovella kolmioepäyhtälöä. Sovella (b):ssä Schwarzin epäyhtälöä vektoreihin $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$ ja $(1, \ldots, 1)$.

Ratk. Olkoon $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

(a) Olkoon $j \in \{1, \ldots, n\}$ sellainen, että $|x|_\infty = |x_j|$; tällöin $|x|_\infty = |x_j| = \sqrt{x_j^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = |x|$. Edelleen $|x| = |(x_1, \ldots, x_n)| = |\sum_{i=1}^n x_i e_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i||e_i| = \sum_{i=1}^n |x_i| = |x|_1$, jossa $(e_1, \ldots, e_n)$ on $\mathbb{R}^n$:n standardikanta, jolla siis $|e_i| = 1$ kaikilla i. Lopuksi, koska $|x_i| \le |x|_\infty$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$, niin $|x|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \le \sum_{i=1}^n |x|_\infty = n|x|_\infty$.

(b) Schwarzin epäyhtälön nojalla on

$$\begin{aligned} |x|_1 &= \sum_{i=1}^n |x_i| = \sum_{i=1}^n 1|x_i| = (1, \ldots, 1) \cdot (|x_1|, \ldots, |x_n|) = |(1, \ldots, 1) \cdot (|x_1|, \ldots, |x_n|)| \\ &\le |(1, \ldots, 1)||(|x_1|, \ldots, |x_n|)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2} = \sqrt{n}|x|. \end{aligned}$$

Huom. Helposti nähdään myös, että epäyhtälöiden oikealla puolella esiintyvät kerrannaiset vakiot 1, 1, n ja $\sqrt{n}$ ovat pienimmät mahdolliset.

Teht. 2. (1:10) *Osoita, että yhtälö* $\|x\| = \max\{|x_1| + |x_2|, 2|x_1|\}$ *määrittelee normin tasossa* $\mathbb{R}^2$. *Piirrä yksikköpallo* $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$.

Ohje. Tutki alkuosassa normien komponentit (joista maksimi) erikseen vektoreille $x + y$ ja ax. Loppuosassa jälleen komponenttien antamat yksikköpallot erikseen, ja niistä johtopäätös.

Ratk. Huomataan, että $\|x\| = \max\{|x|_1, 2|x_1|\}$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$. Huomataan myös, että $\|x\| \ge 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$.

(N1) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^2$. Tällöin $|x+y|_1 \le |x|_1 + |y|_1 \le \|x\| + \|y\|$ ja $2|(x+y)_1| = 2|x_1 + y_1| \le 2|x_1| + 2|y_1| \le \|x\| + \|y\|$. Siis $\|x + y\| = \max\{|x + y|_1, 2|x_1 + y_1|\} \le \|x\| + \|y\|$.

(N2) Tarvitaan

Lemma. *Olkoon* $a, x, y \in \mathbb{R}$, $a \ge 0$. *Tällöin* $\max(ax, ay) = a\max(x, y)$.

Tod. Koska $ax \le a\max(x, y)$ ja $ay \le a\max(x, y)$, niin $\max(ax, ay) \le a\max(x, y)$. Tämä pätee yhtälönä $(0 = 0)$, jos $a = 0$. Jos taas $a > 0$, niin äskeistä tulosta soveltaen saadaan, että

$$\max(x, y) = \max\left(\frac{1}{a}(ax), \frac{1}{a}(ay)\right) \le \frac{1}{a}\max(ax, ay)$$

ja siis $a\max(x, y) \le \max(ax, ay)$.

Äskeinen todistus on yleistettävissä sup:lle. Identiteettiä $\max(x, y) = \dfrac{x + y}{2} + \dfrac{|x - y|}{2}$ käyttämällä saataisiin toinen todistus, joka ei olisi samalla tavoin yleistettävissä. ■

Olkoon nyt $x \in \mathbb{R}^2$ ja $a \in \mathbb{R}$. Tällöin Lemman nojalla

$$\|ax\| = \max\{|ax|_1, 2|ax_1|\} = \max\{|a||x|_1, |a|2|x_1|\} = |a|\max\{|x|_1, 2|x_1|\} = |a|\|x\|.$$

(N3) Jos $x \in \mathbb{R}^2$ ja $\|x\| = 0$, niin $|x|_1 \le \|x\| = 0$ ja siis $|x|_1 = 0$, joten $x = \mathbf{0}$.

Ehtojen (N1)–(N3) nojalla kuvaus $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ on normi vektoriavaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Huomataan, että vektorille $x \in \mathbb{R}^2$ on

$$x \in S \iff \max\{|x|_1, 2|x_1|\} = 1 \iff ((|x|_1 = 1 \text{ ja } |x_1| \le \frac{1}{2}) \text{ tai } (|x|_1 \le 1 \text{ ja } |x_1| = \frac{1}{2}).$$

Tämän voi hahmottaa seuraavasti. Olkoon $\overline{B}_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|_1 \le 1\}$ (yksikkökiekko, joka nyt on kärjellään seisova neliö), $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x|_1 = 1\}$ (yksikköympyrä: neliöviiva), $Y = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| \le \frac{1}{2}\}$ (yhdensuuntaisvyö) ja $L = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = \pm\frac{1}{2}\}$ (kaksi yhdensuuntaista suoraa); tällöin $S = (S_1 \cap Y) \cup (\overline{B}_1 \cap L)$; näistä $S_1 \cap Y$ antaa "katon" ja "lattian", kun taas $\overline{B}_1 \cap L$ antaa "seinät". Siis S on kuusikulmioviiva, jonka kärjet ovat $(1/2, 1/2)$, $(0, 1)$, $(-1/2, 1/2)$, $(-1/2, -1/2)$, $(0, -1)$ ja $(1/2, -1/2)$.

Teht. 3. *Olkoon $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Tutki, onko kuvaus*

$$d(x, y) = |x_1^5 - y_1^5| + |x_2^3 - y_2^3|$$

metriikka joukossa $\mathbb{R}^2$.

Ratk. Osoitetaan, että tämä kuvaus $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ *on metriikka.*

(M1) Olkoon $x, y, z \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$\begin{aligned} d(x, z) &= |x_1^5 - z_1^5| + |x_2^3 - z_2^3| \le (|x_1^5 - y_1^5| + |y_1^5 - z_1^5|) + (|x_2^3 - y_2^3| + |y_2^3 - z_2^3|) \\ &= (|x_1^5 - y_1^5| + |x_2^3 - y_2^3|) + (|y_1^5 - z_1^5|) + |y_2^3 - z_2^3|) = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

(M2) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$d(x, y) = |x_1^5 - y_1^5| + |x_2^3 - y_2^3| = |y_1^5 - x_1^5| + |y_2^3 - x_2^3| = d(y, x).$$

(M3) Olkoon $x, y \in \mathbb{R}^2$. Tällöin

$$d(x, y) = 0 \iff |x_1^5 - y_1^5| = 0 = |x_2^3 - y_2^3| \iff x_1^5 = y_1^5 \text{ ja } x_2^3 = y_2^3 \iff x_1 = y_1 \text{ ja } x_2 = y_2 \iff x = y.$$

Teht. 4. *Määritä tason $\mathbb{R}^2$ kuula $B(a, 3)$, kun $a = (-1, 1)$ ja metriikkana on $d(x, y) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|$, jossa $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$. Ei tarvitse osoittaa, että kyseessä on todella metriikka, mutta voihan sen tehdäkin. (Kuinka helpoiten?)*

Ohje. Valitse aluksi vaikka $a = (0, 0)$, riisu itseisarvot ja siirrä.

Ratk. Kuvaus $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (x_1, 2x_2)$ on lineaarinen isomorfismi käänteiskuvauksenaan kuvaus $x \mapsto (x_1, x_2/2)$, joten asettamalla $\|x\| = |x_1| + 2|x_2| = |x_1| + |2x_2| = |f(x)|_1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$ saadaan normi $\|\cdot\|$ avaruudessa $\mathbb{R}^2$ (kuvauksen f normista $|\cdot|_1$ indusoima normi; tietysti voidaan helposti suoraankin osoittaa, että $\|\cdot\|$ on normi), ja kuvaus d on tähän normiin liittyvä metriikka: $d(x, y) = \|x - y\|$ kaikilla $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Määritetään ensin avoin kuula $B(\mathbf{0}, 3) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid d(x, \mathbf{0}) = |x_1| + 2|x_2| < 3\}$ metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}^2, d)$. Huomataan, että joukko $B(\mathbf{0}, 3)$ on symmetrinen koordinaattiakselien suhteen ja että tapauksessa $x_1, x_2 \ge 0$ on $x \in B(\mathbf{0}, 3) \iff x_1 + 2x_2 < 3$. Täten $B(\mathbf{0}, 3)$ on avoin suunnikas, jonka kärjet ovat pisteet $(3, 0)$, $(0, 3/2)$, $(-3, 0)$ ja $(0, -3/2)$.

Nyt kaikilla $x \in \mathbb{R}^2$ pätee: $x \in B(a, 3) \iff d(x - a, \mathbf{0}) = \|(x - a) - \mathbf{0}\| = \|x - a\| = d(x, a) < 3 \iff x - a \in B(\mathbf{0}, 3) \iff x \in a + B(\mathbf{0}, 3)$. Täten $B(a, 3) = a + B(\mathbf{0}, 3) = \{a + y \mid y \in B(\mathbf{0}, 3)\}$. Siis $B(a, 3)$ on avoin suunnikas, jonka kärjet ovat pisteet $(2, 1)$, $(-1, 5/2)$, $(-4, 1)$ ja $(-1, -1/2)$.

Teht. 5. *Olkoon $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, ja olkoon joukossa $X \times X$ reaaliarvoinen kuvaus*

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right|, \quad x, y \in X.$$

Osoita, että d on metriikka joukossa X.

Ratk. Todetaan aluksi, että $d(x, y) \ge 0$ kaikilla $x, y \in X$.

(M1) $$d(x,z) = \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right| \leq \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| + \left|\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right| = d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X.$$

(M2) $$d(x,y) = \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right| = d(y,x) \quad \forall x,y \in X.$$

(M3) $$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{y}} \Longleftrightarrow x = y.$$

Teht. 6. (2:13) *Olkoon* $E = \mathrm{raj}([0,1],\mathbb{R})$ *varustettuna supnormilla. Määritä sen osajoukkojen* $A = \{f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f_n(x) = x^n, n \in \mathbb{N}\}$ *ja* $B = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ on vakiofunktio}\}$ *välinen etäisyys.*

Ohje. Erästä tiettyä vakiofunktiota kannattaa pitää silmällä ja jaottelukohtana.

Ratk. Olkoon $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\}$ funktion $f \in E$ supnormi. Kullakin $c \in \mathbb{R}$ määritellään $g_c \in B$ asettamalla $g_c(x) = c\ \forall x \in [0,1]$. On määritettävä

$$d(A,B) = \inf\{\|f - g\| \mid f \in A, g \in B\} = \inf\{\|f_n - g_c\| \mid n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}\}.$$

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ ja $c \in \mathbb{R}$. Tällöin, jos $c \leq \frac{1}{2}$, niin

$$\|f_n - g_c\| \geq |f_n(1) - g_c(1)| = 1 - c \geq 1 - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2},$$

ja samoin, jos $c \geq \frac{1}{2}$, niin

$$\|f_n - g_c\| \geq |f_n(0) - g_c(0)| = |0 - c| = c \geq \tfrac{1}{2}.$$

Siis molemmissa tapauksissa on $\|f_n - g_c\| \geq \frac{1}{2}$. (Huomataan myös, vaikka tätä ei tarvita, että $\|f_n - g_c\| > \frac{1}{2}$, jos $c \neq \frac{1}{2}$.)

Toinen todistus äskeiselle: Koska $1 = |1-0| \leq |1-c| + |c-0| = |f_n(1) - g_c(1)| + |g_c(0) - f_n(0)| \leq 2\|f_n - g_c\|$, niin $\|f_n - g_c\| \geq \frac{1}{2}$.

Täten $d(A,B) \geq \frac{1}{2}$.

Toisaalta, kun $x \in [0,1]$, niin $f_1(x) - g_{1/2}(x) = x - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ja $f_1(x) - g_{1/2}(x) = x - \frac{1}{2} \geq 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$, joten $|f_1(x) - g_c(x)| \leq \frac{1}{2}$. Täten $\|f_1 - g_{1/2}\| = \max\{|f_1(x) - \frac{1}{2}| \mid x \in [0,1]\} \leq \frac{1}{2}$. (Edellä olevan perusteella on itse asiassa $\|f_1 - g_{1/2}\| = \frac{1}{2}$, ja samoin voitaisiin osoittaa, että yleisemmin on $\|f_n - g_{1/2}\| = \frac{1}{2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.) Siis $d(A,B) \leq \|f_1 - g_{1/2}\| \leq \frac{1}{2}$.

Näin ollen $d(A,B) = \frac{1}{2}$.