Topologia I, harjoitus 11, 23.–26.4.2012, ratkaisut (Jouni Luukkainen), 2 sivua

1. (14:12, muunnos) *Tarkastellaan tason* $\mathbb{R}^2$ *joukkoa* $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| > |y|\}$.

(a) *Onko* E *yhtenäinen?* **(b)** *Onko sulkeuma* $\overline{E}$ *yhtenäinen?*

Ohje. (b) Origosta alkava jana, ts. polkuyhtenäisyys. Havainnollista kuvalla.

Ratk. **(a)** Joukoille $U = \{(x,y) \in E \mid x > 0\}$ ja $V = \{(x,y) \in E \mid x < 0\}$ pätee, että $E = U \cup V$, $U \neq \emptyset \neq V$, $U \cap V = \emptyset$ ja että U ja V ovat avoimia E:ssä (sillä ne ovat avoimia jopa koko $\mathbb{R}^2$:ssa). Täten määritelmän mukaan joukko E on epäyhtenäinen.

(b) Nyt $\overline{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \geq |y|\}$. Jos $a = (x,y) \in \overline{E}$, niin kaikilla $t \in [0,1]$ on $|tx| = t|x| \geq t|y| = |ty|$ ja siis $ta = (tx, ty) \in \overline{E}$, joten $[\mathbf{0}, a] \subset \overline{E}$. Täten kaikilla $a, b \in \overline{E}$ on $\mathrm{mur}(a, \mathbf{0}, b) = [a, \mathbf{0}] \cup [\mathbf{0}, b] \subset \overline{E}$. Tästä seuraa, että $\overline{E}$ on murtoviivayhtenäinen ja siis polkuyhtenäinen ja näin ollen myös yhtenäinen (lause 14.27; vrt. myös lause 14.22, (1) $\iff$ (3)).

Piirtämistä varten huomaa, että $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ -x < y < x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0,\ x < y < -x\}$ ja että $\overline{E} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ -x \leq y \leq x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq 0,\ x \leq y \leq -x\}$. ∎

2. *Tarkastellaan harjoituksen* 10 *tehtävässä* 1 *esiintyviä* $\mathbb{R}^2$*:n osajoukkoja*

$$A_1 = \{(x,y) \mid x^2/3 + y^2 \leq 4\}, \quad A_2 = \{(x,y) \mid x^2y^2 = 1\}, \quad A_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Mitkä niistä ovat yhtenäisiä? Mitkä $\mathbb{R}^2$*:n alueita?*

Ohje. Sama taktiikka kuin tehtävässä 1.

Ratk. Jos $a = (x,y) \in A_1$, niin kaikilla $t \in [0,1]$ on $(tx)^2/3 + (ty)^2 = t^2(x^2/3 + y^2) \leq 1^2 \cdot 4 = 4$ ja siis $ta = (tx, ty) \in A_1$, joten $[\mathbf{0}, a] \subset A_1$. Tästä seuraa, että A_1 on yhtenäinen.

Samalla tavalla voitaisiin todistaa, että A_3 on yhtenäinen. Mutta osoitetaan tämä osoittamalla, että $A_3 = B(\mathbf{0}, 2)$ on konveksi: Jos $a, b \in A_3$, niin kaikilla $t \in [0,1]$ on $|(1-t)a + tb| \leq (1-t)|a| + t|b| < (1-t)\cdot 2 + t \cdot 2 = 2$ ja täten $(1-t)a + tb \in A_3$, jolloin siis $[a,b] \subset A_3$.

Joukko A_2 taas on määritelmän mukaan epäyhtenäinen, sillä $A_2 = A_2' \cup A_2''$ erillisillä ja epätyhjillä, lauseen 7.2 perusteella joukossa A_2 avoimilla joukoilla $A_2' = \{(x,y) \in A_2 \mid x > 0\}$ ja $A_2'' = \{(x,y) \in A_2 \mid x < 0\}$.

Joukoista A_1, A_2 ja A_3 on $\mathbb{R}^2$:n alue eli $\mathbb{R}^2$:n avoin yhtenäinen osajoukko täsmälleen joukko A_3.

Piirtämistä varten huomaa, että $A_2 = \{(x,y) \mid x > 0, y = 1/x\} \cup \{(x,y) \mid x < 0, y = 1/x\}$ on kahden hyperbelin yhdiste ja että A_1 on ellipsikäyrän $x^2/\sqrt{12}^2 + y^2/2^2 = 1$ rajaaman alueen sulkeuma. ∎

3. *Olkoon* (X, d) *metrinen avaruus ja* $I = [0,1]$. *Olkoot* $\alpha\colon I \to X$ *ja* $\beta\colon I \to X$ *sen polkuja, joilla* $\alpha(1) = \beta(0)$, *siis ensimmäisen päätepiste on toisen alkupiste. Konstruoi* α*:n ja* β*:n avulla* X*:n polut* $\gamma\colon I \to X$ *ja* $\eta\colon I \to X$, *joilla* $\gamma I = \eta I = \alpha I \cup \beta I$ *(eivät eksy edellisiltä),* $\gamma(0) = \alpha(0)$ *ja* $\gamma(1) = \beta(1)$ *sekä* $\eta(0) = \beta(1)$ *ja* $\eta(1) = \alpha(0)$. *Voi sanoa, että* γ *kulkee* α*:n ja* β*:n peräkkäin, ja* η *taas tekee sen käänteisessä järjestyksessä.*

Ohje. Määrittele paloittain.

Ratk. Määritellään kuvaukset $\gamma\colon I \to X$ ja $\eta\colon I \to X$ asettamalla (merkintä $\gamma = \alpha\beta$, polkujen α ja β *tulo*)

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & \text{kun } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \text{kun } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad \text{ja} \quad \eta(t) = \begin{cases} \beta(1-2t), & \text{kun } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha(2-2t), & \text{kun } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

Koska $\alpha(2 \cdot \frac{1}{2}) = \alpha(1) = \beta(0) = \beta(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)$ ja $\beta(1 - 2 \cdot \frac{1}{2}) = \beta(0) = \alpha(1) = \alpha(2 - 2 \cdot \frac{1}{2})$, niin kuvaukset γ ja η ovat hyvinmääritellyt ja tällöin myös jatkuvat (lause 7.13), sillä α ja β ovat polkuina jatkuvia. Lisäksi $\gamma(0) = \alpha(2 \cdot 0) = \alpha(0)$, $\gamma(1) = \beta(2 \cdot 1 - 1) = \beta(1)$, $\eta(0) = \beta(1 - 2 \cdot 0) = \beta(1)$ ja $\eta(1) = \alpha(2 - 2 \cdot 1) = \alpha(0)$. Täten γ ja η ovat vaatimukset täyttäviä X:n polkuja, sillä nyt selvästi on

$$\gamma I = \gamma[0, \tfrac{1}{2}] \cup \gamma[\tfrac{1}{2}, 1] = \alpha I \cup \beta I \quad \text{ja} \quad \eta I = \eta[0, \tfrac{1}{2}] \cup \eta[\tfrac{1}{2}, 1] = \beta I \cup \alpha I. \quad \blacksquare$$

Huom. Ratkaisun kuvaukset konstruoitiin niin, että $\eta(t) = \gamma(1-t)\ \forall t \in [0,1]$; merk. $\eta = \overline{\gamma}$, jolloin $\eta = \overline{\beta}\overline{\alpha}$.

4. (14:4) *Olkoon* $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ *ja* $X = A \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$. *Olkoon* $f\colon X \to \mathbb{R}^2$ *jatkuva kuvaus, jolla* $f(x,0) = (0,0)$ *kaikilla* $x \in A$. *Todista, että kuvajoukko* fX *on yhtenäinen.*

Ohje. Avaruutta X ei siis tiedetä yhtenäiseksi, mutta väli $[0,1]$ tiedetään. Mahdollisuuksia on monia, esimerkiksi lause 14.12 tai polkuyhtenäisyys.

Tod., I tapa. Kullakin $x \in A$ joukko $\{x\} \times [0,1]$ on yhtenäisen joukon $[0,1]$ kanssa homeomorfisena joukkona yhtenäinen (seuraus 14.17), joten sen kuvajoukko $E_x = f[\{x\} \times [0,1]]$ jatkuvassa kuvauksessa f on yhtenäinen (lause 14.16). Nyt $\bigcup_{x \in A} E_x = f\left[\bigcup_{x \in A} (\{x\} \times [0,1])\right] = f\left[\left(\bigcup_{x \in A} \{x\}\right) \times [0,1]\right] = f[A \times [0,1]] = fX$. Lisäksi $(0,0) = f(x,0) \in E_x$ kaikilla $x \in A$, joten $(0,0) \in \bigcap_{x \in A} E_x$. Täten fX on yhtenäinen (lause 14.12). (Oletusta $A \neq \emptyset$ ei tarvittu.) ■

Tod., II tapa. Olkoon $a, b \in fX$. Tällöin $a = f(x,s)$ ja $b = f(y,t)$ joillain $x, y \in A$ ja $s, t \in [0,1]$. Määritellään kuvaus $\alpha \colon [0,1] \to fX$ asettamalla

$$\alpha(\lambda) = \begin{cases} f(x, (1-2\lambda)s), & \text{kun } 0 \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \\ f(y, (2\lambda - 1)t), & \text{kun } \frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1. \end{cases}$$

Koska $f(x, (1 - 2 \cdot \frac{1}{2})s) = f(x,0) = (0,0) = f(y,0) = f(y, (2 \cdot \frac{1}{2} - 1)t)$, niin α on hyvinmääritelty ja tällöin myös jatkuva. Siis α on fX:n polku, jolla $\alpha(0) = f(x,s) = a$ ja $\alpha(1) = f(y,t) = b$. Täten fX on jopa polkuyhtenäinen. ■

5. (14:9) *Osoita, että* $\mathbb{R}^3$*:n osajoukko* $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + \cos y - e^y \sin z = 1\}$ *on yhtenäinen.*

Ohje. Lause 14.16, kuvaus $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, jolla $\operatorname{Im} f = A$.

Tod. Huomataan, että

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 1 - \cos y + e^y \sin z\} = \{(1 - \cos y + e^y \sin z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Määritellään siis kuvaus $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ asettamalla $f(y,z) = (1 - \cos y + e^y \sin z, y, z)$ kaikilla $(y,z) \in \mathbb{R}^2$, jolloin f on jatkuva ja $\operatorname{Im} f = f\mathbb{R}^2 = A$. Täten A on yhtenäinen yhtenäisen avaruuden $\mathbb{R}^2$ jatkuvana kuvana. ■ **Huom.** Kuvaus f on jopa upotus, joten $A \approx \mathbb{R}^2$ on yhtenäinen pinta.

6. (14:8, muunnelma) *Olkoon G metrisen avaruuden (X,d) alue. Olkoot joukot A, $B \subset \partial G$ ($= G$:n reuna) suljettuja, epätyhjiä ja erillisiä. Osoita, että on olemassa sellainen piste $x \in G$, että $d(x,A) = d(x,B)$.*

Ohje. Tarkastele jatkuvaa kuvausta $f \colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$, lause 14.19. Erillisyyttä muuten voidaan tässä väljentää: kunhan $A \not\subset B$ ja $B \not\subset A$, mutta ei tämän enempää.

Tod. Voidaan määritellä kuvaus $f \colon X \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$, sillä $A \neq \emptyset \neq B$, ja se on tosiaan jatkuva. Koska $A \neq \emptyset$ ja $A \cap B = \emptyset$ (riittäisi olettaa, että $A \not\subset B$), niin on olemassa piste $a \in A$, jolla $a \notin B$. Koska B on oletuksen nojalla suljettu joukossa ∂G (ja siis myös X:ssä, koska reunana ∂G on suljettu X:ssä) ja $a \in A \subset \partial G$, niin $d(a,B) > 0$. Toisaalta $d(a,A) = 0$. Täten $f(a) < 0$. Samoin on olemassa piste $b \in B \setminus A$, ja tälle on $d(b,A) > 0 = d(b,B)$ ja siis $f(b) > 0$.

Kuvauksen f jatkuvuuden nojalla on olemassa sellaiset pisteiden a ja b ympäristöt U ja V avaruudessa X, että $f(x) < 0$, kun $x \in U$, ja $f(x) > 0$, kun $x \in V$. Koska $a, b \in \partial G$, niin on olemassa pisteet $a' \in U \cap G$ ja $b' \in V \cap G$. Nyt $f(a') < 0 < f(b')$. Täten, koska G avaruuden X alueena on yhtenäinen ja koska rajoittuma $f|G$ on jatkuva, niin on olemassa piste $x \in G$, jolla $f(x) = 0$ (lause 14.19) eli siis $d(x,A) = d(x,B)$. ■

Huom. 1) Oletuksesta, että G on X:n alue eli että G on avoin ja yhtenäinen, tarvittiin vain G:n yhtenäisyyttä, mutta toki tulos on erityisen mielenkiintoinen juuri alueen G tapauksessa, jossa $G \cap \partial G = \emptyset$.
2) Väite pätee myös aivan toisenlaisessa tilanteessa, nimittäin triviaalisti, jos $A = B \neq \emptyset$.

Vaihtoehtoinen tod. Esitetään tämä myös tilanteessa $A \not\subset B$ ja $B \not\subset A$ toimivana. Olkoon

$$Y = G \cup (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(siis $Y = G \cup A \cup B$, jos $A \cap B = \emptyset$). Tällöin $G \subset Y \subset \overline{G} = G \cup \partial G$, joten, koska G alueena on yhtenäinen, niin Y on yhtenäinen (lause 14.11).

Ehdon $A \neq \emptyset$ ja $B \neq \emptyset$ nojalla voidaan määritellä kuvaus $f \colon Y \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,A) - d(x,B)$, ja tällöin f on jatkuva. Huomataan, että A ja B ovat suljettuja X:ssä, sillä ∂G on suljettu X:ssä ja A ja B ovat suljettuja ∂G:ssä. Nyt, jos $x \in A \setminus B$, niin $x \in A$ ja $x \notin B$, joten $d(x,A) = 0$ ja $d(x,B) > 0$, jolloin siis $f(x) < 0$. Jos $x \in B \setminus A$, niin $x \in B$ ja $x \notin A$, joten $d(x,B) = 0$ ja $d(x,A) > 0$, jolloin siis $f(x) > 0$. Toisaalta $A \setminus B \neq \emptyset$ ja $B \setminus A \neq \emptyset$, joten f siis todellakin saa negatiivisen arvon ja positiivisen arvon.

Päätellään, että koska Y on yhtenäinen, f jatkuva ja f saa sekä negatiivisen arvon että positiivisen arvon, niin f saa arvon 0 jossain pisteessä $x \in Y$ (lause 14.19). Tällöin on välttämättä oltava $x \in Y \setminus ((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = G$. Nyt $d(x,A) = d(x,B)$. ■