

**Teht. 1.** (13:3, melkein) Tutki lyhyesti, onko joukko  $A_k \subset \mathbb{R}^2$  (a) kompakti, (b) täydellinen, kun

$$A_1 = \{(x, y) \mid x^2/3 + y^2 \leq 4\}, \quad A_2 = \{(x, y) \mid x^2 y^2 = 1\}, \quad A_3 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

**Ratk.** Joukko  $A_1 = \{(x, y) \mid x^2/12 + y^2/4 \leq 1\}$  (suljettu ellipsialue) on suljettu ja rajoitettu, joten se on kompakti (lause 13.14) ja täydellinen (lause 12.6).

Joukko  $A_2 = \{(x, y) \mid xy = \pm 1\}$  (hyperbelien  $xy = 1$  ja  $xy = -1$  yhdiste) on suljettu, joten se on täydellinen, mutta rajoittamaton, joten se ei ole kompakti.

Joukko  $A_3$  (avoin kiekko) ei ole suljettu, joten se ei ole kompakti eikä täydellinen.

**Teht. 2.** Olkoon  $A \neq \emptyset$  tason  $\mathbb{R}^2$  suljettu ja rajoitettu osajoukko. Osoita, että löytyy sellainen piste  $(a, b) \in A$ , että  $x^2 + 2 \sin y \geq a^2 + 2 \sin b$  kaikilla  $(x, y) \in A$ .

**Ohje.** Käytä jatkuva kuvauksia.

**Ratk.** Määritellään jatkuva funktio  $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto x^2 + 2 \sin y$ . Joukko  $A$  on kompakti ja epätyhjä, joten funktiolla  $f$  on olemassa pienin arvo  $\min f$  (lause 13.21), toisin sanoen on olemassa piste  $(a, b) \in A$ , jolla  $f(x, y) \geq f(a, b)$  kaikilla  $(x, y) \in A$ . Piste  $(a, b)$  on siten vaadittu.

**Teht. 3.** (13:21) Olkoon kuvaus  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva, ja olkoon se tasaisesti jatkuva joukossa  $\mathbb{R}^n \setminus B^n$  ( $B^n$  avoin yksikkökuula). Osoita, että  $f$  on tasaisesti jatkuva koko  $\mathbb{R}^n$ :ssä.

**Huom.** Kuvauksen maalina voisi olla mikä tahansa metrinen avaruus.

**Ohje.** Niin iso kuula  $A = \overline{B}(\mathbf{0}, r)$  ja niin pieni  $\delta > 0$ , että  $x, y \in A$  tai  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus B^n$  aina, kun  $|x - y| < \delta$ . Piirrä itsellesi kuva.

**Ratk.** Olkoon  $A = \overline{B}(\mathbf{0}, 2)$ . Tällöin  $A$  on  $\mathbb{R}^n$ :n suljettuna ja rajoitettuna osajoukkona kompakti, joten  $f|_A$  on jatkuvana kuvauksena tasaisesti jatkuva (lause 13.36). Huomataan myös, että  $d(B^n, \mathbb{R}^n \setminus A) = 1$ .

Olkoon  $\varepsilon > 0$ . Koska  $f|_A$  on äskeisen nojalla tasaisesti jatkuva, on olemassa sellainen  $\delta_1 > 0$ , että  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , jos  $x, y \in A$  ja  $|x - y| < \delta_1$ . Koska  $f|_{\mathbb{R}^n \setminus B^n}$  on oletuksen nojalla tasaisesti jatkuva, on olemassa sellainen  $\delta_2 > 0$ , että  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ , jos  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus B^n$  ja  $|x - y| < \delta_2$ .

Valitaan  $\delta = \min(1, \delta_1, \delta_2) > 0$ . Tarkastellaan pisteitä  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , joilla  $|x - y| < \delta$ . Ehdon  $|x - y| < 1$  tähden ei voi olla sekä  $\{x, y\} \cap B^n \neq \emptyset$  että  $\{x, y\} \cap A \neq \emptyset$ . Siis on aina  $\{x, y\} \subset A$  tai  $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n \setminus B^n$ . Koska  $|x - y| < \delta_1$  ja  $|x - y| < \delta_2$ , niin molemmissa tapauksessa on  $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ . Täten  $f$  on tasaisesti jatkuva  $\mathbb{R}^n$ :ssä.

**Huom.** Voitaisiin myös ensin valita  $\delta_2$  ja sitten asettaa  $A = \overline{B}(\mathbf{0}, 1 + \delta_2)$  (nyt  $A$  siis riippuisi luvusta  $\varepsilon$ ) sekä tämän jälkeen valita  $\delta_1$ , jolloin  $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$  kävisi.

**Teht. 4.** (13:4, muunnos) Olkoon avaruus  $(X, d)$  kompakti, ja olkoon  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  laskeva jono sen suljettuja epätyhjiä osajoukkoja.

(a) Osoita sopivan jonon avulla, että leikkaus  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$  on epätyhjä ja kompakti.

**Huom.** Jos lisäksi  $d(A_n) \rightarrow 0$ , niin leikkaus on yksiö (vrt. tehtävä 4 harjoitus 9).

(b) Onko leikkaus välttämättä epätyhjä, jos kompaktiutta ei oleteta?

**Ohje.** (b) Valitse  $X = \mathbb{R}$  ja siinä sopivat sisäkkäiset suljetut välit.

**Ratk.** (a) Olkoon  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Joukko  $A$  on suljettu, joten  $A$  on kompakti (lause 13.7).

Kullakin  $n \in \mathbb{N}$  voidaan valita piste  $x_n \in A_n$ . Tällöin  $(x_n)$  on jono kompaktissa avaruudessa  $X$ , joten sillä on jokin  $X$ :n pistettä  $x$  kohti suppeneva osajono  $(x_{n_k})$ . Jos  $p \in \mathbb{N}$ , niin kaikilla  $k \geq p$  on  $n_k \geq n_p \geq p$ , joten  $(x_{n_k})_{k \geq p}$  on jono joukossa  $A_p$ , joka on suljettu, jolloin siis  $x = \lim_{p \leq k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in A_p$ . Täten  $x \in A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} A_p$ . Siis  $A \neq \emptyset$ .

(b) Ei. Olkoon esimerkiksi  $X = \mathbb{R}$  ja  $A_n = [n, \infty[$  kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ . Tällöin jono  $(A_n)$  toteuttaa (a)-kohdan oletukset, mutta  $X$  ei ole kompakti. Selvästi  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \emptyset$ .

**Teht. 5.** (a) Olkoon  $r > 0$ , ja olkoon  $A$  metrisen avaruuden  $(X, d)$  osajoukko, josta löytyy sellainen jono  $(x_n)$ , että  $d(x_k, x_n) \geq r$  aina, kun  $k \neq n$ . Osoita, että tällöin  $A$  ei ole kompakti.

(b) Varustetaan jatkuvien funktioiden avaruus  $E = C([0, 1], \mathbb{R})$  supnormilla  $\| \cdot \|_\infty$ ,  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$ , kun  $f \in E$ . Osoita (a)-kohtaa hyväksi käyttäen, että  $E$ :n suljettu yksikkökuula

$$\overline{B} = \overline{B}(\mathbf{0}, 1) = \{f \in E : \|f\|_\infty \leq 1\}$$

ei ole kompakti, vaikka se tunnetusti on suljettu ja rajoitettu joukko  $E$ :ssä.

**Ohje.** (b) Jono paloittain määriteltyjä (yksinkertaisia) funktioita  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , jotka ovat hengissä väleillä  $]1/(n+1), 1/n[$ , eli kaksi ei yhtä aikaa.

**Ratk.** (a) Jonon  $(x_n)$  jokaiselle osajonolle  $(x_{n_k})$  pätee, että  $d(x_{n_k}, x_{n_l}) \geq r$  aina, kun  $k \neq l$ , joten jono  $(x_{n_k})$  ei ole Cauchy jono eikä täten suppene (vaan siis *hajaantuu*; termi puuttuu kirjasta). Täten  $A$  ei ole kompakti.

(b) Kullakin  $n \in \mathbb{N}$  määritellään piste  $x_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right)$  sekä jatkuva funktio  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  asettamalla

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2|x - x_n|}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}, & \text{kun } \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{kun } 0 \leq x \leq \frac{1}{n+1} \text{ tai } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

jolloin  $0 \leq f_n(x) \leq f_n(x_n) = 1$  kaikilla  $x \in [0, 1]$  ja siis  $\|f\|_\infty = 1$ .

Tapauksessa  $k \neq n$  on  $]1/(k+1), 1/k[ \cap ]1/(n+1), 1/n[ = \emptyset$ , joten  $|f_k(x) - f_n(x)| = \max\{f_k(x), f_n(x)\}$  kaikilla  $x \in [0, 1]$  ja siis  $\|f_k - f_n\|_\infty = 1$ .

Täten soveltamalla (a)-kohtaa sijoituksella  $(X, A, (x_n), r) \mapsto (E, \overline{B}, (f_n), 1)$  nähdään, että  $\overline{B}$  ei ole kompakti.

**Teht. 6.** (13:18, kahden pisteen tehtävä) Olkoon  $B^n$  avaruuden  $\mathbb{R}^n$  avoin yksikkökuula ja kuvaus  $f : B^n \rightarrow B^n$  homeomorfismi. Olkoon  $(x_k)$  sellainen pistejono  $B^n$ :ssä, että  $|x_k| \rightarrow 1$ , kun  $k \rightarrow \infty$ . Osoita, että  $|f(x_k)| \rightarrow 1$ .

**Huom.** Vastaava tulos pätee myös suljetulle yksikkökuulalle  $\overline{B}^n$ .

**Ohje.** Epäsuora todistus, kompaktiutta tarvitaan.

**Ratk.** Olkoon  $y_k = f(x_k)$  kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ . Tehdään vastaoletus, että ei päde  $|y_k| \rightarrow 1$ . Koska  $|y_k| < 1$  kaikilla  $k \in \mathbb{N}$ , niin tällöin on olemassa luku  $r \in ]0, 1[$  ja jonon  $(y_k)$  osajono  $(y_{k_l})$ , jolle  $|y_{k_l}| \leq r$  kaikilla  $l \in \mathbb{N}$ . Joukko  $A = \overline{B}^n(\mathbf{0}, r) \subset B^n$  on kompakti, joten sen jonolla  $(y_{k_l})$  on jotain  $A$ :n pistettä  $y$  kohti suppeneva osajono  $(y_{k_{l_p}})$ . Korvaamalla alkuperäinen jono  $(x_k)$  sen osajonolla  $(x_{k_{l_p}})$  voidaan siis (yleisyyttä menettämättä) olettaa, että  $|x_k| \rightarrow 1$  ja  $y_k = f(x_k) \rightarrow y \in B^n$ .

Tällöin käänteiskuvauksen  $f^{-1}$  jonojatkuvuuden nojalla on  $x_k = f^{-1}(y_k) \rightarrow x = f^{-1}(y) \in B^n$ . Mutta tästä seuraa normin jatkuvuuden tähden, että  $|x_k| \rightarrow |x| < 1$ , mikä on ristiriita.