Topologia I
Harjoitus 1
23. 1. 2012 alkavalle viikolle
Ratkaisuehdotuksia (Santeri Miihkinen)

1. Mitkä seuraavista väittämistä ovat aina totta? Yhden sanan vastaus riittää. $A, B, X, Y, \cdots$ joukkoja, $f\colon X \to Y$ kuvaus.

(a) $f^{-1} \cup_{i\in I} B_i = \cup_{i\in I} f^{-1} B_i$, *(b)* $f \cap_{i\in I} A_i = \cap_{i\in I} f A_i$,
(c) $f^{-1} f A = A$, *kun f on injektio, (d)* $\cap_{x>0}[x, 2x] = \emptyset$.

Ratkaisu.
(a) on totta
(b) ei ole totta
(c) on totta
(d) on totta

2. Olkoot $x = (1, -2, 1)$ ja $y = (2, -2, -1)$ euklidisen avaruuden $\mathbb{R}^3$ vektoreita sekä $a = -3$. Määritä

(a) $a(x-y)$, *(b)* $|a||x-y|$, *(c)* $|a|(|x|-|y|)$, *(d)* $a(x\cdot y)$, *(e)* $|a||x||y|$, *(f)* $x\cdot|a|y$,

Käytössä tavallinen pistetulo ja tavalliset euklidiset normit sekä $\mathbb{R}^3$:ssa että $\mathbb{R}$:ssä.

Ratkaisu. Lasketaan ensin $x - y$, $|x|$, $|y|$, $|x - y|$ ja $x \cdot y$.

$x - y = (1, -2, 1) - (2, -2, -1) = (1 - 2, -2 - (-2), 1 - (-1)) = (-1, 0, 2)$
$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$
$|y| = \sqrt{y \cdot y} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$
$|x - y| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
$x \cdot y = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) = 5.$

Nyt saadaan
(a) $a(x - y) = -3(-1, 0, 2) = (-3 \cdot (-1), -3 \cdot 0, -3 \cdot 2) = (3, 0, -6)$,
(b) $|a||x - y| = 3\sqrt{5}$,
(c) $|a|(|x| - |y|) = 3(\sqrt{6} - 3)$,
(d) $a(x \cdot y) = -15$,
(e) $|a||x||y| = 9\sqrt{6}$,

(f) $x \cdot |a|y = |a|(x \cdot y) = 15.$

3. Olkoon $D \neq \emptyset$ joukko. Osoita että kaikkien rajoitettujen funktioiden joukko $\mathrm{raj}(D, \mathbb{R})$ *on kaikkien funktioiden vektoriavaruuden $F(D, \mathbb{R})$ aliavaruus.*

Ratkaisu. Olkoot $f, g \in \mathrm{raj}(D, \mathbb{R})$ ja $a \in \mathbb{R}$. Nyt on olemassa luvut $M, N \geq 0$, joille $|f(x)| \leq M$ ja $|g(x)| \leq N$ kaikilla $x \in D$. Reaalilukujen kolmioepäyhtälön avulla saadaan

$$|(f + g)(x)| = |f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M + N$$

kaikilla $x \in D$, joten $f + g \in \mathrm{raj}(D, \mathbb{R})$. Lisäksi

$$|(af)(x)| = |af(x)| = |a||f(x)| \leq |a|M$$

kaikilla $x \in D$, joten myös $af \in \mathrm{raj}(D, \mathbb{R})$. Koska nollafunktio on selvästi rajoitettu, niin edellisten kohtien nojalla joukko $\mathrm{raj}(D, \mathbb{R})$ on vektoriavaruuden $F(D, \mathbb{R})$ aliavaruus.

4 (Väisälä 1:4). Olkoon E sisätuloavaruus ja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sen sisätulo. Joukon $A \subset E$ ortokomplementti on joukko

$$A^{\perp} = \{x \in E | \, \langle x, y \rangle = 0 \text{ kaikilla } y \in A\}.$$

Osoita että joukko $A^{\perp}$ on E:n vektorialiavaruus.

Ratkaisu. Olkoot $x, y \in A^{\perp}$ ja $a \in \mathbb{R}$. Sisätulopostulaattien (S2) ja (S3) (Väisälä, s. 15) avulla saadaan kaikilla $z \in A$

$$\begin{aligned} \langle ax, z \rangle &= a\langle x, z \rangle = a \cdot 0 = 0 \\ \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle = 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

joten ax, $x + y \in A^{\perp}$. Lisäksi nollavektorille $\bar{0} \in E$ tunnetusti pätee $\bar{0} = 0 \cdot \bar{0}$ (missä $0 \in \mathbb{R}$), joten postulaatin (S2) nojalla saadaan

$$\langle \bar{0}, z \rangle = \langle 0 \cdot \bar{0}, z \rangle = 0 \cdot \langle \bar{0}, z \rangle = 0$$

kaikilla $z \in E$ (erityisesti kaikilla $z \in A$). Siispä $\bar{0} \in A^{\perp}$. Näin ollen joukko $A^{\perp}$ on avaruuden E vektorialiavaruus.

5 (Väisälä 1:6, osa). Olkoon E sisätuloavaruus ja $x, y \in E$. Todista nk. suunnikassääntö

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Ratkaisu. Lasketaan ensin yhtälön vasemmalla puolella olevat neliöt:

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle \\ &= \langle x+y, x\rangle + \langle x+y, y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle y,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= |x|^2 + 2\langle x,y\rangle + |y|^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x-y|^2 &= \langle x-y, x-y\rangle = \langle x, x-y\rangle + \langle -y, x-y\rangle \\ &= \langle x-y, x\rangle + \langle x-y, -y\rangle = \langle x,x\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,-y\rangle \\ &= |x|^2 - 2\langle x,y\rangle + |y|^2. \qquad (2) \end{aligned}$$

Yhtälöistä (1) ja (2) seuraa

$$|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

Huomautus. Suunnikassäännön nimi seuraa sen geometrisesta tulkinnasta: Vektorien x ja y virittämän suunnikkaan lävistäjien neliöiden summa on sen kaikkien sivujen neliöiden summa.

6. Olkoot $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Tutki mitkä sisätulopostulaatit $\mathbb{R}^3$:n reaaliarvoinen tulo

$$\langle x, y\rangle = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1$$

toteuttaa. Onko se $\mathbb{R}^3$:n sisätulo?

Ratkaisu. Olkoot $z = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3$ ja $a \in \mathbb{R}$. Koska

$$\langle x, y\rangle = x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1 = y_1x_3 + y_2x_2 + y_3x_1 = \langle y, x\rangle,$$

niin (S1) toteutuu. Lisäksi ehdot (S2) ja (S3) toteutuvat, sillä

$$\langle ax, y\rangle = (ax_1)y_3 + (ax_2)y_2 + (ax_3)y_1 = a(x_1y_3 + x_2y_2 + x_3y_1) = a\langle x, y\rangle$$

ja

$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle &= (x_1+y_1)z_3+(x_2+y_2)z_2+(x_3+y_3)z_1\\ &= (x_1z_3+x_2z_2+x_3z_1)+(y_1z_3+y_2z_2+y_3z_1)=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle.\end{aligned}$$

Ehto (S4) ei toteudu, sillä esimerkiksi vektori $x=(1,0,-1)$ antaa

$$\langle x, x\rangle = 1\cdot(-1)+0^2+(-1)\cdot 1=-2<0.$$

Myöskään ehto (S5) ei toteudu, sillä esimerkiksi valinnalla $y=(-1,2,2)\neq\bar{0}$ saadaan

$$\langle y, y\rangle = (-1)\cdot 2+2^2+2\cdot(-1)=0.$$

Koska kaikki ehdot (S1)-(S5) eivät toteudu, niin $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ei ole sisätulo.