

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Osoita kuvaus $d : X \times X \rightarrow \mathbf{R}_+$, jossa

$$d(x, y) = |\ln(x + 1) - \ln(y + 1)|,$$

metriikaksi joukossa $X = \mathbf{R}_+ = [0, \infty[$. Funktion $x \rightarrow \ln x$ perusominaisuudet katsotaan tunnetuiksi.

2. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, jossa

$$f(x, y) = (3y - 1, -2x + 1).$$

(a) Osoita se jatkuvaksi.

(b) Onko se peräti Lipschitz (koko tasossa \mathbf{R}^2)?

3. Tarkastellaan kuvausta $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$,

$$f(x, y) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0, \\ x - 1, & \text{kun } 0 \leq x < 1, \\ (x - 1)^2 y^2, & \text{kun } x \geq 1. \end{cases}$$

Osoita se jatkuvaksi.

4. Olkoon $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ jatkuva funktio. Osoita sen kuvaaja

$$G(f) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}, y = f(x)\}$$

suljetuksi joukoksi (euklidisessä) tasossa \mathbf{R}^2 .