Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
Korvaava 2. kurssikoe 15.5.2012

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Olkoon $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \le y < x^2\}$ ja $B = \mathbf{R}^2 \setminus A$ (piirrä itsellesi kuva). Merkitään lyhyesti $z = (x, y)$. Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } z = (x,y) \in A, \\ 0, & \text{kun } z = (x,y) \in B. \end{cases}$$

(a) Anna $\mathbf{R}^2$:n jono (z_n) jolla $z_n \to \mathbf{0}$, mutta vastaava f:n arvojen jono $\big(f(z_n)\big)$ ei suppene $\mathbf{R}$:ssä. Ei tarvitse perustella. Tässä $\mathbf{0} = (0, 0)$.

(b) Onko kuvaus f jatkuva $\mathbf{0}$:ssa? Lyhyesti perusteltu vastaus.

2. Olkoon $X =]0, 1]$ ja $Y = [0, \infty[$ (euklidinen metriikka). Tarkastellaan kuvausta $f : X \to Y$, $f(x) = 1/x - 1$, kun $x \in X$ (pidetään tunnettuna että se kuvaa pisteen $x \in X$ joukkoon Y). Osoita että f on homeomorfismi.

3. Olkoot joukot $A_k \subset X$ kompakteja, $k \in \mathbf{N}$.

(a) Osoita että niiden äärellinen yhdiste $\cup_{k=1}^{n} A_k$ on aina kompakti.

(b) Anna esimerkki, jossa $X = \mathbf{R}$ ja yhdiste $\cup_{k=1}^{\infty} A_k$ ei ole kompakti, vaikka A_k:t ovat.

4. Osoita että $\mathbf{R}^3$:n osajoukko $A = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = x^2 - y\}$ on

(a) täydellinen, (b) yhtenäinen.

Ohje (b). Esitä A kuvajoukkona sopivassa kuvauksessa.