

**Huom.** Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Olkoon  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  kuvaus (mielivaltainen). Osoita että sen kuvaaja

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}$$

ei ole avoin joukko euklidisessä tasossa  $\mathbf{R}^2$ .

2. Olkoon  $(X, d)$  metrinen avaruus ja  $A$  ja  $B$  sen epätyhjiä osajoukkoja, joilla  $d(A, B) > 0$ . Osoita että

$$d(x, A) + d(x, B) > 0 \quad \text{kaikilla } x \in X.$$

3. Olkoon  $X = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y > 1\}$  (puolitaso) varustettu euklidisellä metriikalla. Määää sen osajoukon  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0 \text{ ja } y - x/2 > 1\}$  sulkeuma  $cl_X A$  avaruudessa  $X$ . Perustelut.

4. Tarkastellaan rajoitettujen funktioiden  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$  avaruutta  $E = raj([0, 1], \mathbf{R})$  varustettuna supnormilla  $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$  ja sen osajoukkoa

$$A = \{f \in E \mid f(x) \geq x \text{ kaikilla } x \in [0, 1]\}.$$

(a) Kiinnitetään  $x \in [0, 1]$ . Osoita että sitä vastaava kuvaus

$$\psi_x : E \rightarrow \mathbf{R}, \quad f \mapsto f(x) - x,$$

on jatkuva.

(b) Osoita että joukko  $A$  on suljettu avaruudessa  $E$ .

(c) Osoita että se ei ole avoin  $E$ :ssä.