Topologia I

Harjoitus 9, kevät 2012, paperi kaksipuolinen

1. Olkoon (f_n) jono jatkuvia funktioita $f_n : [a,b] \to \mathbf{R}$, joka suppenee välillä $[a,b]$ tasaisesti kohti funktiota $f : [a,b] \to \mathbf{R}$. Osoita että tällöin

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Miksi integraalit ovat olemassa? Lyhyesti, päteekö vastaava tulos derivaatoille?

2. Olkoon $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < y < x^2\}$ ja $B = \mathbf{R}^2 \setminus A$. Selvästi $\mathbf{0} = (0,0) \in \bar{A}$ ja $\mathbf{0} \in \bar{B}$ (piirrä itsellesi kuva). Määritellään kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ asettamalla

$$f(z) = f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{kun } z = (x,y) \in A, \\ 0, & \text{kun } z = (x,y) \in B. \end{cases}$$

(a) Anna raja-arvot $\lim_{z\to\mathbf{0},\, z\in A} f(z)$ ja $\lim_{z\to\mathbf{0},\, z\in B} f(z)$ pitkin joukkoja A ja B.

(b) Minkä johtopäätöksen niistä voit vetää, jos kysytään onko f jatkuva $\mathbf{0}$:ssa?

(c) Osoita että $\lim_{z\to\mathbf{0},\, z\in L} f(z) = 0$ kaikilla origon kautta kulkevilla suorilla L.

Huom. Voi siis sanoa että "korkeaulotteisempi raja-arvo ei niin vain seuraa matala-ulotteisemmista raja-arvoista" (poikkeus **kaikki** jonot). Sama koskee jatkuvuutta.

3 (12:11). Olkoon X täydellinen ja $f : X \to Y$ bilipschitz. Osoita että kuvajoukko fX on täydellinen ja siis suljettu Y:ssä.

4 (12:7). (a) Olkoon X täydellinen metrinen avaruus ja $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono sen suljettuja epätyhjiä osajoukkoja, joiden läpimitat $d(A_n)$ suppenevat kohti nollaa. Osoita että joukkojen A_n leikkauksessa on tasan yksi piste.

(b, muunnos) Anna esimerkki $\mathbf{R}$:n osajoukoista U_n, jotka muuten toteuttavat saman kuin (a)-kohdan joukot A_n mutta ovat suljetun sijasta avoimia, ja joiden leikkaus onkin sitten tyhjä.

Ohje. (a) Valitse jokaisella $n \in \mathbf{N}$ piste $x_n \in A_n$ ja tarkastele jonoa (x_n). Avaruuden X täydellisyys on tarpeen.

5 (12:14). Olkoon $(E, \|*\|)$ täydellinen normiavaruus eli Banachin avaruus, ja olkoon $f : E \to E$ kontraktio. Osoita että yhtälö $F(x) = x + f(x)$ määrittelee homeomorfismin $F : E \to E$, joka on bilipschitz.

Ohje. Kiinnitetään $y \in E$ ja merkitään $g_y(x) = y - f(x)$. Osoita että kuvauksella $g_y : E \to E$ on täsmälleen yksi kiintopiste $G(y)$, jolloin saadaan kuvaus $G : E \to E$, $y \mapsto G(y)$. Osoita sitten että $F \circ G = G \circ F = id_E$ ja että F on bilipschitz. Kiinnitä erityistä huomiota epäyhtälöketjun puoleen $m\|x - z\| \le \|F(x) - F(z)\|$ kaikilla $x, z \in E$, jossa vakiolta vaaditaan $m > 0$.

6 (12:15, osa). Tutki seuraavista funktioista $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ovatko ne tasaisesti jatkuvia koko $\mathbf{R}$:ssä:

$$(a) \quad f(x) = \frac{x}{1+x^2}, \quad (b) \quad f(x) = x^{1/3}.$$

Ohje. Väliarvolauseesta on hyötyä.