Topologia I

Harjoitus 8, kevät 2012

1 (11:2). Olkoon X metrinen avaruus, $A \subset X$ ja (x_k) jono A:ssa (siis $x_k \in A$ kaikilla $k \in \mathbf{N}$). Osoita että jonon kasautumisarvot kuuluvat sulkeumaan $\bar{A}$.

2. Tutki suppenevatko seuraavat $\mathbf{R}^2$:n jonot (x_k). Myönteisessä tapauksessa anna jonon raja-arvo. Kielteisessä tapauksessa tutki, onko jonolla edes yhtä suppenevaa osajonoa (ja siten kasautumisarvoa). Lyhyt esitys riittää.

(a) $x_k = \big((1/5)^k, 1^k\big)$, (b) $x_k = (2^{-k}, (-1)^k)$, (c) $x_k = \big(k^{1/2}, (-2)^{-k}\big)$.

3. Todista epäsuorasti (vastaoletuksen kautta) lauseen 11.8 implikaatio $(2) \Rightarrow (1)$, ts. että jos funktio $f : X \to Y$ on jonojatkuva pisteessä $a \in X$, niin se on siinä myös jatkuva (tulos koskee metrisiä avaruuksia X ja Y).

4. Olkoot (x_k) ja (y_k) reaalilukujonoja, joilla $x_k \to 3\pi/4$ ja $y_k \to \sqrt{\pi}/2$. Merkitään $w_k = \sin(x_k - y_k^2)$. Osoita tarkasti että $w_k \to 1 = \sin(\pi/2)$.

Ohje. Käytä funktion $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = \sin(x - y^2)$, jonojatkuvuutta (lauseen 11.8 implikaatio $(1) \Rightarrow (2)$) ja merkitse $z_k = (x_k, y_k) \in \mathbf{R}^2$, jolloin $w_k = f(z_k)$.

5 (11:10, osaksi). Olkoon $n \in \mathbf{N}$ ja $f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funktio, joka kuvaa $f_n(x) = \max\{0, x - n\}$ kun $x \in \mathbf{R}$. Tutki suppeneeko funktiojono (f_n)

(a) pisteittäin $\mathbf{R}$:ssä, (b) tasaisesti $\mathbf{R}$:ssä, (c) tasaisesti joukossa $]-\infty, 10^{10}]$.

Melko vaikeana ja teoreettisena seuraava tehtävä ansaitsee kaksi suorituspistettä:

6. Olkoon X joukko, d metriikka siinä ja kuvaus $f : X \to X$ bijektio.

(a) Osoita että myös $e(x,y) = d\big(f(x), f(y)\big)$ (kaikilla $x, y \in X$) on metriikka joukossa X, ja että kuvaus $f : (X, e) \to (X, d)$ on (bijektiivinen) isometria.

(b) Oletetaan lisäksi että kuvaus $f : (X,d) \to (X,d)$ on homeomorfismi. Osoita että tällöin $d \sim e$.

(c) Sovella edellisiä kohtia joukkoon $\mathbf{R}$ ja sen metriikkaan $e(x,y) = |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}|$, ja osoita e (topologisesti) ekvivalentiksi tavallisen euklidisen metriikan kanssa.