Topologia I
Harjoitus 7, kevät 2012

1. Onko funktio $f : [0,10] \to \mathbf{R}$, $f(x) = x^3 + x$, (a) Lipschitz-kuvaus, (b) bilipschitz-kuvaus, (c) upotus?

Ohje. Väliarvolause.

2. Tarkastellaan $\mathbf{R}^3$:n pintaa $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \sin x + \cos y\}$ varustettuna euklidisella metriikalla. Pidetään tunnettuna, että kuvaus

$$f : A \to \mathbf{R}^2, \quad f(x,y,z) = (x,y) \quad \text{kun } (x,y,z) \in A,$$

on bijektio. Osoita että se on homeomorfismi ja siten $A \approx \mathbf{R}^2$. Pidetään tunnettuna, että kuvaukset $\sin, \cos : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ovat jatkuvia.

3. Olkoon $x \in X$ ja $\emptyset \neq A \subset X$. Ehto $d(x,A) > 0$ on topologinen ominaisuus (sulkeuma!). Olkoon $f : (X,d) \approx (Y,e)$ homeomorfismi. Osoita että todellakin $e(f(x), f(A)) > 0$, kun $d(x,A) > 0$.

Ohje. Sopivia lauseita esimerkiksi 6.11 ja 6.12.

Huom. On syytä olla varovainen sen suhteen, mikä on tai ei topologinen ominaisuus. Esimerkiksi ominaisuus $d(A,B) > 0$ ei ole.

4 (10:1). Kuvaus $e : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}_+$, $e(x,y) = \sqrt{|x-y|}$, on metriikka $\mathbf{R}$:ssä (ei tarvitse todistaa). Onko se (a) ekvivalentti, (b) bilipschitz-ekvivalentti $\mathbf{R}$:n tavallisen euklidisen metriikan d kanssa?

Ohje. Paras tutkia identtisen kuvauksen jatkuvuutta ja Lipschitz-jatkuvuutta näiden määritelmiin nojaten.

Seuraava tehtävä on vaikeahkona kahden suorituspisteen arvoinen:

5 (9:5, muunnos). Konstruoi jokin homeomorfismi $f : B^2 \approx \mathbf{R}^2$, jossa $B^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < 1\}$ on tason avoin yksikkökiekko. Löydätkö käänteiskuvauksen?

Ohje. Liiku radiaalisti eli kerro yksikkövektoria $x/|x|$, ja sitä varten tarkastele vastavaa tilannetta $\mathbf{R}$:ssä (geometrisesti tai voit käyttää yhtä hyvin funktiota $\tan : [0, \pi/2[\to [0, \infty[$).

Huom. Jokainen voi osallistua korvaavaan 1. kurssikokeeseen 12.3.