**Topologia I**
Harjoitus 6, kevät 2012 (viikko 11)

1 (6:16). Joukko $A \subset X$ on avaruuden $X$ *retrakti*, jos on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $f : X \to A$ ($A$:ssa indusoitu metriikka), että rajoittuma $f|A$ on $A$:n identtinen kuvaus, ts. $f(x) = x$ kaikilla $x \in A$. Osoita että retrakti on aina suljettu joukko (avaruudessaan $X$).

Ohjeita. (1) Komplementti avoimeksi: Etsi komplementin pisteen $x \in X \setminus A$ ja sen kuvan $f(x)$ sellaiset erilliset ympäristöt $U$ ja $V$ avaruudessa $X$, että $fU \subset V$. (2) Voit käyttää myös harjoituksen 5 tehtävän 3 tulosta.

2. Olkoon

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0 \text{ ja } x \geq 0\}.$$

Määritä joukot $intA$, $\partial A$ ja $\bar{A}$ avaruudessa $X = \mathbf{R}^2$. Melko yksityiskohtainen perustelu.

3. Olkoon joukko $A$ kuten edellisessä tehtävässä. Määritä joukot $intA$, $\partial A$ ja $\bar{A}$ avaruudessa $Y = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy \geq 0\}$. Jälleen melko yksityiskohtainen perustelu.
Mikä yksinkertainen relaatio pätee reunojen $\partial_X A$ ja $\partial_Y A$ välillä? Sattuma?

4. (7:7) Olkoon $A, B \subset X$ ja $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$. Osoita, että $A$ ja $B$ ovat avoimia ja suljettuja joukkoja avaruudessa $A \cup B$, tämä varustettuna luonnollisesti $X$:stä periytyvällä indusoidulla metriikalla.
Täytyykö $A$:n ja $B$:n olla avoimia tai suljettuja joukkoja avaruudessa $X$?

5. Olkoon $A \subset X$, ja olkoon $f : X \to Y$ kuvaus, jonka rajoittuma $f|A$ on jatkuva sisäpisteessä $a \in int(A)$. Osoita että myös $f$, kuvauksena $f : X \to Y$, on jatkuva pisteessä $a$.
Muotoile alkuosan perusteella jatkuvuustulos, joka koskee kuvausta $f : X \to Y$ ja $X$:n avoimia osajoukkoja $U_i$, $i \in I$, joilla $\cup_{i \in I} U_i = X$.

6. Osoita että $[0, \infty[ \approx ] - \infty, a]$, jossa $a \in \mathbf{R}$ on vakio ja tavallinen euklidinen metriikka on käytössä.

Ohje. Konstuoi tarvittava homeomorfismi ja perustele kyseinen kuvaus homeomorfismiksi.