

**Topologia I**  
Harjoitus 5, kevät 2012

1. Tutki ovatko seuraavat euklidisen tason  $\mathbf{R}^2$  osajoukot suljettuja:

$$(a) A_k = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 1/(k+1) \leq |(x, y)| \leq 1/k\}, \text{ jossa } k \in \mathbf{N}, \quad (b) A = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} A_k.$$

Jos ei, niin määrää sulkeuma. Ohje. Jatkuvat kuvaukset, sulkeumaksi osoittamisessa on hyötyä lauseen 6.8 kohdasta (4).

2. Onko  $\mathbf{R}^2$ :n osajoukko  $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0, y = \sin(1/x)\}$  suljettu, ja jos ei, niin mikä on sen sulkeuma  $\bar{A}$ ? Mitkä pisteet ovat kasautumispisteitä? Todistusta ei tässä haeta, lyhyt vastaus riittää.

Ohje. Hahmottele kuva. Mihin kasautuvat pisteet  $(x_k, \sin(1/x_k)) \in A$ , joissa  $x_k = 1/(\pi/2 + k\pi)$  ja  $k \in \mathbf{N}$  on parillinen tai pariton. Bolzanon lause.

3. (6:12) Olkoot  $f, g : X \rightarrow Y$  jatkuvia kuvauksia ja  $A \subset X$  sellainen joukko, että  $f|_A = g|_A$ . Osoita, että  $f|\bar{A} = g|\bar{A}$ .

4. (6:8) Olkoon  $E$  sisätuloavaruus ja  $A \subset E$ . Osoita että  $A$ :n ortokomplementti  $A^\perp = \{x \in E \mid \langle x, a \rangle = 0 \text{ kaikilla } a \in A\}$  on suljettu  $E$ :ssä. Siten  $A^\perp$  on  $E$ :n suljettu vektorialiavaruus (harjoituksen 1 teht. 4).

Ohje. Sisätulo on jatkuva. Esitä  $A^\perp$  vaikka leikkauksena.

5. (7:3 osa) Muodosta joukon  $A \subset B^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  sulkeuma avaruudessa  $B^2$ , kun

$$(a) A = \{(x, 0) \in B^2 \mid -1 < x < 1\}, \quad (b) A = \{(x, y) \in B^2 \mid x + y > 0\}.$$

Mitkä  $A$ :t ovat suljettuja  $B^2$ :ssa? Ohje. Ehkä ensin sulkeuma  $\mathbf{R}^2$ :ssa.

6. Olkoon kuvaus  $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbf{R}$  määritelty yhtälöllä

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & \text{kun } -1 \leq x \leq 0, \\ -2x^2 + x + 1, & \text{kun } 0 < x \leq 1, \\ x^3 - x, & \text{kun } 1 < x \leq 2. \end{cases}$$

Osoita että se on jatkuva. Ohje. Lause 7.13.

**Huom.** Ensimmäisen kurssikokeen 28.2. alue, samoin korvaavan 12.3., on Väisälän luvut 1-7. Kokeissahan saa olla mukana yhden A4-arkin kokoinen tiivistelmä. Harjoitus 6 on 4. periodin ensimmäisellä viikolla 12.-16.3.