Topologia I

Harjoitus 4, kevät 2012

1 (4:5). Olkoot $f : X \to Y$ ja $g : Y \to Z$ Lipschitz-kuvauksia L-vakioina M ja N. Osoita että yhdistetty kuvaus $g \circ f : X \to Z$ on MN-Lipschitz.

2. Olkoon $f : [-2, 2] \to \mathbf{R}$ funktio $f(x) = x^2/2 - x^3/3$. Määritä väliarvolauseen avulla jokin sellainen $M \geq 0$, että f on M-Lipschitz.

3. Olkoon $(E, |*|)$ normiavaruus, ja olkoot x ja y kaksi kiinnitettyä E:n pistettä. Yhtälö

$$h(t) = (1-t)x + ty, \quad \text{kun } t \in [0, 1],$$

määrittelee kuvauksen $h : [0, 1] \to E$, joka piirtää pisteitä x ja y yhdistävän janan E:ssä. Osoita että h on jatkuva.

4. (4:4, osapuilleen). Olkoon $E = C([0, 1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Jokaista $f \in E$ kohti yhtälö

$$\alpha(f)(x) = 5xf(x) \quad \text{kaikilla } x \in [0, 1]$$

määrittelee kuvauksen $\alpha(f) : [0, 1] \to \mathbf{R}$.

(a) Osoita että $\alpha(f)$ on jatkuva, ts. $\alpha(f) \in E$.

(b) Kohdan (a) mukaan saadaan kuvaus $\alpha : E \to E$, $f \mapsto \alpha(f)$. Todista että α on jatkuva.

(c) Todista että α on Lipschitz.

Ohje. Kohdassa (a) Väisälän luku 5.

5. Tarkastellaan euklidisen tason $\mathbf{R}^2$ osajoukkoa

$$A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - x < y < 2x\}.$$

Osoita että A on avoin joukko.

Ohje. Muista jatkuvat kuvaukset ja luku 5.

6. Olkoot $f, g : X \to \mathbf{R}$ jatkuvia funktioita. Osoita että tällöin myös

(a) maksimifunktio $h : X \to \mathbf{R}$, jossa $x \mapsto h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, on jatkuva,

(b) itseisarvofunktio $|f| : X \to \mathbf{R}$, jossa $x \mapsto |f|(x) = |f(x)|$, on jatkuva.

Ohjeita. (a) Kiinitä $a \in X$, jolloin voit olettaa $h(a) = f(a)$, ja saat a:n tarvittavan ympäristön kahden ympäristön leikkauksena. (b) Käytä kohtaa (a).