Topologia I
Harjoitus 3, kevät 2012

1. (2:12) Olkoon $E = raj([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla ja sen luomalla metriikalla. Määritä $d(A)$, kun $A = \{f_n : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f_n(x) = x^n, n \in \mathbf{N}\}$.

Ohje. Piirrä kuvaajia. Mikä on $\lim_{n\to\infty}(x - x^n)$, kun $0 \le x < 1$?

2. Mitkä seuraavista $\mathbf{R}^2$:n osajoukoista ovat avoimia:

(a) $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = 2y^2\}$, (b) $B = A^c$, (c) $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sin x^2 > y\}$?

Lyhyt vastaus riittää, ei perusteluja.

3 (3:3). Olkoon X metrinen avaruus, $G \subset X$ avoin ja $F \subset X$ äärellinen. Osoita että joukko $G \setminus F$ on avoin.

4. Olkoon X metrinen avaruus, kuvaus $f : X \to \mathbf{R}$ olkoon jatkuva pisteessä $a \in X$ ja $f(a) > 0$. Osoita että a:lla on ympäristö $U \subset X$, jossa kaikilla x pätee $f(x) > f(a)/2$.

5 (4:8, osa). Olkoon

$$f(\mathbf{0}) = 0 \quad \text{ja} \quad f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}, \quad \text{kun } (x,y) \ne \mathbf{0}.$$

Osoita että näin määritelty funktio $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ on epäjatkuva origossa.

6. Tarkastellaan jatkuvien funktioiden avaruutta $E = C([0,1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ (tässä sup on tunnetusti max) ja tämän luomalla metriikalla. Mitkä seuraavista joukoista ovat avoimia E:ssä (perustelu):

(a) $A = \{f \in E : \|f\|_\infty > 0\}$, (b) $B = \{f \in E \mid f(x) > 0 \ \forall x \in [0,1]\}$,

(c) $C = \{f \in E \mid f(1/n) > 0 \ \forall n \in \mathbf{N}\}$?

Ohje. (a) Komplementti, (b) jatkuva funktio $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ saavuttaa maksiminsa ja miniminsä, (c) eräs sopiva $f \in C$.