

Topologia I
Harjoitus 2, kevät 2012

1 (1:7, osa). Tarkastellaan \mathbf{R}^n :n normeja $|x| =$ tavallinen euklidinen normi, $|x|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$ ja $|x|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$. Osoita että

(a) $|x|_\infty \leq |x| \leq |x|_1 \leq n|x|_\infty$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$,

(b) $|x|_1 \leq \sqrt{n}|x|$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$.

Ohje. Kohdan (a) keskimmaisessä epäyhtälössä kirjoita $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ ja sovelta kolmioepäyhtälöä. Sovella (b):ssä Schwarzin epäyhtälöä vektoreihin $(|x_1|, \dots, |x_n|)$ ja $(1, \dots, 1)$.

2 (1:10). Osoita että yhtälö $\|x\| = \max\{|x_1| + |x_2|, 2|x_1|\}$ määrittelee normin tasossa \mathbf{R}^2 . Piirrä yksikköpallo $S = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid \|x\| = 1\}$.

Ohje. Tutki alkuosassa normien komponentit (joista maksimi) erikseen vektoreille $x + y$ ja ax . Loppuosassa jälleen komponenttien antamat yksikköpallot erikseen, ja niistä johtopäätös.

3. Olkoon $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$. Tutki onko kuvaus

$$d(x, y) = |x_1^5 - y_1^5| + |x_2^3 - y_2^3|$$

metriikka joukossa \mathbf{R}^2 .

4. Määritä tason \mathbf{R}^2 kuula $B(a, 3)$, kun $a = (-1, 1)$ ja metriikkana on $d(x, y) = |x_1 - y_1| + 2|x_2 - y_2|$, jossa $x = (x_1, x_2)$ ja $y = (y_1, y_2)$. Ei tarvitse osoittaa että kyseessä on todella metriikka, mutta voihan sen tehdäkin. (Kuinka helppoiten?)

Ohje. Valitse aluksi vaikka $a = (0, 0)$, riisu itseisarvot ja siirrä.

5. Olkoon $X = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$, ja olkoon joukossa $X \times X$ reaaliarvoinen kuvaus

$$d(x, y) = \left| \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}} \right|, \quad x, y \in X.$$

Osoita että d on metriikka joukossa X .

6. (2:13) Olkoon $E = \text{raj}([0, 1], \mathbf{R})$ varustettuna supnormilla. Määritä sen osajoukkojen $A = \{f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f_n(x) = x^n, n \in \mathbf{N}\}$ ja $B = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} \mid f \text{ on vakiofunktio}\}$ välinen etäisyys $d(A, B)$.

Ohje. Erästä tiettyä vakiofunktioita kannattaa pitää silmällä ja jaottelukohtana.