Topologia I

Harjoitus 11, kevät 2012

1 (14:12, muunnos). Tarkastellaan tason $\mathbf{R}^2$ joukkoa $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| > |y|\}$.
(a) Onko E yhtenäinen? (b) Onko sulkeuma $\bar{E}$ yhtenäinen?

Ohje. (b) Origosta alkava jana, ts. polkuyhtenäisyys. Hainnollista kuvalla.

2. Tarkastellaan harjoituksen 10 tehtävässä 1 esiintyviä $\mathbf{R}^2$:n osajoukkoja
$A_1 = \{(x,y) \mid x^2/3+y^2 \leq 4\}$, $A_2 = \{(x,y) \mid x^2y^2 = 1\}$, $A_3 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 4\}$.
Mitkä niistä ovat yhtenäisiä? Mitkä $\mathbf{R}^2$:n alueita?

Ohje. Sama taktiikka kuin tehtävässä 1.

3. Olkoon (X,d) metrinen avaruus ja $I = [0,1]$. Olkoot $\alpha : I \to X$ ja $\beta : I \to X$ sen polkuja, joilla $\alpha(1) = \beta(0)$, siis ensimmäisen päätepiste on toisen alkupiste. Konstruoi α:n ja β:n avulla X:n polut $\gamma : I \to X$ ja $\eta : I \to X$, joilla $\gamma(I) = \eta(I) = \alpha(I) \cup \beta(I)$ (eivät eksy edellisiltä), $\gamma(0) = \alpha(0)$ ja $\gamma(1) = \beta(1)$ sekä $\eta(0) = \beta(1)$ ja $\eta(1) = \alpha(0)$. Voi sanoa että γ kulkee α:n ja β:n peräkkäin ja η taas tekee sen takaperin.

Ohje. Määrittele paloittain.

4 (14:4). Olkoon $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \emptyset$ ja $X = A \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2$. Olkoon $f : X \to \mathbf{R}^2$ jatkuva kuvaus, jolla $f(x,0) = (0,0)$ kaikilla $x \in A$. Todista että kuvajoukko fX on yhtenäinen.

Ohje. Avaruutta X ei siis tiedetä yhtenäiseksi, mutta väli $[0,1]$ tiedetään. Mahdollisuuksia on monia, esimerkiksi lause 14.12 tai polkuyhtenäisyys.

5 (14:9). Osoita että $\mathbf{R}^3$:n osajoukko $A = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + \cos y - e^y \sin z = 1\}$ on yhtenäinen.

Ohje. Lause 14.16, kuvaus $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, jolla $Imf = A$.

6 (14:8, muunnelma). Olkoon G metrisen avaruuden (X,d) alue. Olkoot joukot $A, B \subset \partial G$ ($=G$:n reuna) suljettuja, epätyhjiä ja erillisiä. Osoita että on olemassa sellainen piste $x \in G$ että $d(x,A) = d(x,B)$.

Ohje. Tarkastele jatkuvaa kuvausta $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) = d(x,A) - d(x,B)$, lause 14.19. Erillisyyttä muuten voidaan tässä väljentää: kunhan $A \not\subset B$ ja $B \not\subset A$, mutta ei tämän enempää.

Huom. Toisen kurssikokeen 9.5. (13-15, Exactumin auditoriot) alue on Väisälän luvut 8-14 pois lukien asiat tuloavaruus ja yhtenäiset komponentit.