Topologia I
Harjoitus 10, kevät 2012

1 (13:3, melkein). Tutki lyhyesti onko joukko $A_k \subset \mathbf{R}^2$ (a) kompakti, (b) täydellinen, kun

$A_1 = \{(x,y) \mid x^2/3+y^2 \le 4\}$, $A_2 = \{(x,y) \mid x^2y^2 = 1\}$, $A_3 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 < 4\}$.

2. Olkoon $A \neq \emptyset$ tason $\mathbf{R}^2$ suljettu ja rajoitettu osajoukko. Osoita että löytyy sellainen piste $(a,b) \in A$, että $x^2 + 2\sin y \ge a^2 + 2\sin b$ kaikilla $(x,y) \in A$.

Ohje. Käytä jatkuvaa kuvausta.

3 (13:21). Olkoon kuvaus $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ jatkuva, ja olkoon se tasaisesti jatkuva joukossa $\mathbf{R}^n \setminus B^n$ (B^n avoin yksikkökuula). Osoita että f on tasaisesti jatkuva koko $\mathbf{R}^n$:ssä. Huom. Kuvauksen maalina voisi olla mikä tahansa metrinen avaruus.

Ohje. Niin iso kuula $A = \bar{B}(\mathbf{0}, r)$ ja niin pieni $\delta > 0$, että $x, y \in A$ tai $x, y \in \mathbf{R}^n \setminus B^n$ aina kun $|x - y| < \delta$. Piirrä itsellesi kuva.

4 (13:4, muunnos). Olkoon avaruus (X,d) kompakti, ja olkoon $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$ laskeva jono sen suljettuja epätyhjiä osajoukkoja.

(a) Osoita sopivan jonon avulla, että leikkaus $\cap_{n\in\mathbf{N}} A_n$ on epätyhjä ja kompakti.

Huom. Jos lisäksi $d(A_n) \to 0$, niin leikkaus on yksiö (vrt. tehtävä 4 harjoitus 9).

(b) Onko leikkaus välttämättä epätyhjä, jos kompaktiutta ei oleteta?

Ohje. (b) Valitse $X = \mathbf{R}$ ja siinä sopivat sisäkkäiset suljetut välit.

5. (a) Olkoon $r > 0$, ja olkoon A metrisen avaruuden (X,d) osajoukko, josta löytyy sellainen jono (x_n), että $d(x_k, x_n) \ge r$ kaikilla $k \neq n$. Osoita että tällöin A ei ole kompakti.

(b) Varustetaan jatkuvien funktioiden avaruus $E = C([0,1], \mathbf{R})$ supnormilla $\|*\|_\infty$, $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$ kun $f \in E$. Osoita (a)-kohtaa hyväksi käyttäen että E:n suljettu yksikkökuula

$$\bar{B} = \bar{B}(\mathbf{0}, 1) = \{f \in E : \|f\|_\infty \le 1\}$$

ei ole kompakti, vaikka se tunnetusti on suljettu ja rajoitettu joukko E:ssä.

Ohje. (b) Jono paloittain määriteltyjä (yksinkertaisia) funktiota $f_n : [0,1] \to \mathbf{R}$, jotka ovat hengissä väleillä $]1/(n+1), 1/n[$, eli kaksi ei yhtä aikaa.

6 (13:18, kahden pisteen tehtävä). Olkoon B^n avaruuden $\mathbf{R}^n$ avoin yksikkökuula ja kuvaus $f : B^n \to B^n$ homeomorfismi. Olkoon (x_k) sellainen pistejono B^n:ssä, että $|x_k| \to 1$ kun $k \to \infty$. Osoita että $|f(x_k)| \to 1$. Huom. Vastaava tulos pätee myös suljetulle yksikkökuulalle $\bar{B}^n$ (Brouwerin alueensäilymislause).

Ohje. Epäsuora todistus, kompaktiutta tarvitaan.