Topologia I
Harjoitus 1, kevät 2012

1. Mitkä seuraavista väittämistä ovat aina totta? Yhden sanan vastaus riittää. $A, B, X, Y, \cdots$ joukkoja, $f : X \to Y$ kuvaus.

$$(a) \quad f^{-1} \cup_{i\in I} B_i = \cup_{i\in I} f^{-1} B_i, \quad (b) \quad f \cap_{i\in I} A_i = \cap_{i\in I} f A_i,$$
$$(c) \quad f^{-1} f A = A, \quad \text{kun } f \text{ on injektio}, \quad (d) \quad \cap_{x>0} [x, 2x] = \emptyset.$$

2. Olkoot $x = (1, -2, 1)$ ja $y = (2, -2, -1)$ euklidisen avaruuden $\mathbf{R}^3$ vektoreita sekä $a = -3$. Määritä
(a) $a(x - y)$, (b) $|a||x - y|$, (c) $|a|(|x| - |y|)$, (d) $a(x \cdot y)$, (e) $|a||x||y|$, (f) $x \cdot |a|y$,
Käytössä tavallinen pistetulo ja tavalliset euklidiset normit sekä $\mathbf{R}^3$:ssa että $\mathbf{R}$:ssä.

3. Olkoon $D \neq \emptyset$ joukko. Osoita että kaikkien rajoitettujen funktioiden joukko $raj(D, \mathbf{R})$ on kaikkien funktioiden vektoriavaruuden $F(D, \mathbf{R})$ aliavaruus.

4 (Väisälä 1:4). Olkoon E sisätuloavaruus ja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sen sisätulo. Joukon $A \subset E$ *ortokomplementti* on joukko

$$A^\perp = \{x \in E \mid \langle x, y \rangle = 0 \text{ kaikilla } y \in A\}.$$

Osoita että joukko $A^\perp$ on E:n vektorialiavaruus.

5 (Väisälä 1:6, osa). Olkoon E sisätuloavaruus ja $x, y \in E$. Todista nk. suunnikassääntö

$$|x + y|^2 + |x - y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$$

6. Olkoot $x = (x_1, x_2, x_3)$ ja $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$. Tutki mitkä sisätulopostulaatit $\mathbf{R}^3$:n reaaliarvoinen tulo

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_3 + x_2 y_2 + x_3 y_1$$

toteuttaa. Onko se $\mathbf{R}^3$:n sisätulo?