Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Topologia I
2. kurssikoe 9.5.2012

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Määrittele lyhyesti metrisen avaruuden täydellisyys.

2. Tarkastellaan avaruuden $\mathbf{R}^3$ osajoukkoa $A = \{(s, s^2 - t, t) \in \mathbf{R}^3 \mid s, t \in \mathbf{R}\}$. Anna jokin homeomorfismi $f : \mathbf{R}^2 \to A$ ja perustele se todella homeomorfismiksi. Kun nyt tuommoinen homeomorfismi on, onko A kompakti tai yhtenäinen?

3. Olkoon A avaruuden X osajoukko, jolla $\partial A = \emptyset$, siis sen reuna on tyhjä.

(a) Osoita että tällöin A on yhtä aikaa sekä avoin että suljettu avaruudessa X.

(b) Voiko tällöin olla olemassa sellaista polkua $\alpha : [0,1] \to X$, että $\alpha(0) \in A$ ja $\alpha(1) \in X \setminus A$? Perustelu.

4. Olkoon $A = [0,1] \times [0,1] = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x, y \in [0,1]\}$ ja $f : A \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio. Osoita että funktio $F : [0,1] \to \mathbf{R}$,

$$F(x) = \int_0^1 f(x,t)\,dt \quad \text{kun } x \in [0,1],$$

on jatkuva. Onko se tasaisesti jatkuva välillä $[0,1]$?

Huom. Integraalit ovat jatkuvuuden perusteella olemassa.