Topologia I
2. kurssikoe 9.5.2012
Ratkaisuja.

2. Määritellään kuvaus $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{R}^2 \to A$,
$$f(x,y) = (x, x^2 - y, y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Komponentit f_1, f_2, f_3 ovat polynomeina jatkuvia, jotan f on jatkuva. } 2 p.

Huom! $f(x,y) \in A \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ joukon A määr. nojalla. } 1 p.

Määr. sitten kuvaus $g = (g_1, g_2) : A \to \mathbb{R}^2$
$$g(x,y,z) = (x, z).$$
g on projektion $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ rajoittumana jatkuva.
Selvästi $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$ ja $f \circ g = id_A$, joten g on f:n käänteiskuvaus. Siis f on bijektio.
Siis f on jatkuva bij., jonka käänt. kuvaus g on jatkuva, joten f on homeomorfismi. } 1 p.

Koska $\mathbb{R}^2$ ei ole kompakti ja $A \approx \mathbb{R}^2$, niin A ei ole kompakti. } 1 p.

Koska $\mathbb{R}^2$ on yhtenäinen ja $A \approx \mathbb{R}^2$, niin A on yhtenäinen. } 1 p.

3. a) Tod. Merk. $B = X \setminus A$. Tällöin
$\bar{A} \cap \bar{B} = \partial A = \emptyset$, joten (koska $A \subset \bar{A}$ ja $B \subset \bar{B}$ ja $A \cup B = X$) saadaan $A = \bar{A}$ ja $B = \bar{B}$.
Siis $A \,\text{Ⓢ}\, X$. } 2 p.

Myös $B \,\text{Ⓢ}\, X$ (koska $B = \bar{B}$), joten
$$A = X \setminus B \,\text{Ⓐ}\, X.$$ } 2 p.

b) Väite. Ei ole olemassa k.o. polkua.
Tod. Väli $[0,1] \subset \mathbb{R}$ on yhtenäinen, joten polun kuvajoukko $E := \alpha([0,1])$ on yhtenäinen. } 1 p.
Jos tällainen polku α olisi olemassa, niin kuvajoukko E kohtaisi A:n ja CA:n, jolloin reunanylityslauseen nojalla se kohtaisi myös reunan ∂A.
Tämä on ristiriita, koska tässä $\partial A = \emptyset$.
Siis k.o. polkua ei ole olemassa. } 1 p.

$\square$

4. <u>Tod.</u> Neliö $A = [0,1] \times [0,1]$ on $\mathbb{R}^2$:n suljettu ja rajoitettu osajoukko, joten se on kompakti.
Koska $f : A \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja A on kompakti, on f tasaisesti jatkuva. } 2p.

Olk. $\varepsilon > 0$. Tas. jatkuvuuden nojalla $\exists\ \delta > 0$ s.e.

$$|f(x,s) - f(y,t)| < \varepsilon \quad \forall\ (x,s), (y,t) \in A, \text{ joilla } |(x,s) - (y,t)| < \delta.$$

Erityisesti kun $x, y \in [0,1]$ ja $|x - y| < \delta$, niin $|(x,t) - (y,t)| < \delta$ $\forall\ t \in [0,1]$ ja silloin siis

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_0^1 |f(x,t) - f(y,t)|\, dt \leq \int_0^1 \varepsilon\, dt = \varepsilon.$$

} 3p.

Koska $[0,1]$ on kompakti ja $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin F on tasaisesti jatkuva. } 1p.

$\square$

2. kurssikokeen arvosteli Erik Elfving.

Vastaanottoajat ennen kesälomaa:

to 31.5. klo 15–16
ke 6.6. klo 15–16
to 7.6. klo 9.30–10.30.