Esimerkki 2.2. Olkoon Z eksponentiaalisesti jakautunut parametrina s ja V sellainen, että $\xi = Z - PV$ toteuttaa lauseen 2.1 ehdot. Siis

$$\mathbb{P}(Z > z) = e^{-sz}, \quad \forall z \geq 0.$$

Määrätään lauseen 2.1 vakio C.

Ilmeisesti

$$\mathbb{P}(T(0) < \infty) = \mathbb{E}_R\left(e^{-RY_{T(0)}}\, \mathbb{1}(T(0) < \infty)\right).$$

Selvää on, että $\mathbb{P}_R(T(0) < \infty) = 1$. Osoitetaan, että $Y_{T(0)}$ on eksponentiaalisesti jakautunut parametrina $s - R$, kun ξ:llä on konjugaattijakauma parametrina R. Selvästi

$$\mathbb{E}_R(e^{s\xi}) = \frac{\mathbb{E}(e^{(s+R)\xi})}{\mathbb{E}(e^{R\xi})}$$

$$= \frac{\mathbb{E}(e^{(s+R)Z})}{\mathbb{E}(e^{RZ})} \cdot \frac{\mathbb{E}(e^{-(s+R)PV})}{\mathbb{E}(e^{-RPV})}.$$

Nähdään, että konjugaattijakauman alaisuudessa ξ on muotoa

$$\xi = Z' - PV',$$

missä $Z' \perp\!\!\!\perp V'$, Z':lla on Z:n konjugaattijakauma parametrilla R ja V':lla on V:n konjugaattijakauma parametrilla R/P. Siis Z' on eksponenttijakautunut parametrina $s - R$.

Nyt kaikilla $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y, T(0) = n)$$

$$= \mathbb{P}_R((\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in B_n, \xi_n > y - (\xi_1 + \dots + \xi_{n-1})),$$

missä

$$B_n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1};\ x_1 \leq 0,\ x_1 + x_2 \leq 0, \dots, x_1 + \dots + x_{n-1} \leq 0\}.$$

Olkoon $H(x) = \mathbb{P}_R(\xi \leq x)$ ja $K(x) = \mathbb{P}_{R/p}(V \leq x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tällöin

$$\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y, T(0) = n)$$

$$= \int_{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B_n} \int_{v \in \mathbb{R}} e^{-(s+R)(y + pv - x_1 - \dots - x_{n-1})} \, dH(x_1) \dots dH(x_{n-1}) \, dK(v)$$

$$= e^{-(s-R)y} \, \mathbb{P}(T(0) = n),$$

siis $\mathbb{P}_R(Y_{T(0)} > y) = e^{-(s-R)y}$ ja

$$\mathbb{P}(T(0) < \infty) = \frac{s-R}{s}.$$

Lisäksi

$$\mathbb{E}(Y_{T(0)} \, e^{R Y_{T(0)}} \, 1(T(0) < \infty))$$

$$= \mathbb{E}_R(Y_{T(0)} \, 1(T(0) < \infty)) = \frac{1}{s-R}$$

ja

$$C = \frac{s-R}{s}.$$

Itse asiassa tässä tapauksessa

$$\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) = C e^{-RU_0}, \quad \forall U_0 > 0.$$

Tämä nähdään esityksestä (2.9) toteamalla, että myös $Y_{T(U_0)} - U_0$ on eksponenttijakautunut parametrilla $\delta - R$. Edellä esitetty laskelma menee läpi pienin muutoksin. Siispä

$$\mathbb{P}(T(U_0) < \infty) = e^{-RU_0} \int_0^\infty e^{-Rx} (\delta - R) e^{-(\delta - R)x} dx$$

$$= \frac{\delta - R}{\delta} e^{-RU_0} = C e^{-RU_0}.$$

<u>Korjaus</u> Lauseen 2.1 vakion C lausekkeessa pitää olla nimittäjässä

$$e^{RY_{T(0)}} \quad \text{eikä} \quad e^{-RY_{T(0)}}.$$

2.4. Osasummien summista poikkeamista

Olkoon satunnaiskulku $\{Y_n\}$ kuten lauseessa 2.1. Olkoon $a > \mathbb{E}(\xi)$. Johdetaan seuraavassa asymptoottinen esitys todennäköisyydelle

(2.12) $$\mathbb{P}(Y_n/n > a), \quad n \to \infty.$$

Oletetaan, että $c(s) < \infty$ eräälle $s > 0$ ja että

$$c'(s) = a \quad \text{eräälle } s = s_a.$$

Lisäksi oletetaan, että $\xi - b$ ei ole aritmeettinen millään $b \in \mathbb{R}$.

Todennäköisyyden (2.12) arvioimisessa hyödynnetään seuraavaa tulosta.

Lemma 2.4. Edellä esitetyn lisäksi oletetaan, että $\mathbb{E}(\xi^3)$ on äärellisenä olemassa. Olkon $\mu = \mathbb{E}(\xi)$, $\sigma^2 = \operatorname{Var} \xi$ ja

$$\gamma = \frac{\mathbb{E}((\xi-\mu)^3)}{\sigma^3} \quad \text{(vinous)}.$$

Silloin

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right) = \Phi(x) - \frac{\gamma(1-x^2)\Phi'(x)}{6\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad n \to \infty,$$

tasaisesti alueessa $x \in \mathbb{R}$, missä Φ on standardi normaalijakauman kertymäfunktio.

Todistus on esitetty lähteessä Feller (1971): An introduction to probability theory and its applications, luku XVI.4. Luvussa XVI.5 on todistettu, että myös

$$\left| \mathbb{P}(\bar{Y}_n \leq x) - \Phi(x) \right| \leq \frac{3\rho}{\sigma^3 \sqrt{n}}, \; \forall x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N},$$

missä $\rho = \mathbb{E}(|\xi - \mu|^3)$. Kyseessä on ns. Berry - Esseen approksimaatio.

<u>Lause 2.5</u> Lemman 2.4 definitioin

$$\lim_{n \to \infty} J_n \, \mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} > a \right) = 1,$$

missä

$$J_n = s_a \sqrt{c''(s_a) 2\pi n} \; e^{n c^*(a)}.$$

Todistus. Tehdään muuttujiin ξ_j konjugaattimuunnos parametrilla s_a riippumattomuus säilyttäen. Saadaan

$$\mathbb{P}(Y_n > na) = \mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + n c(s_a)} \mathbb{1}(Y_n > na)\right]$$

$$= e^{-n c^*(a)} \mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + n s_a a} \mathbb{1}(Y_n > na)\right].$$

Olkoon

$$F_n(x) = \mathbb{P}_{s_a}\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}} \le x\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Silloin

$$\mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a Y_n + n s_a a} \mathbb{1}(Y_n > na)\right]$$

$$= \mathbb{E}_{s_a}\left[e^{-s_a \sqrt{c''(s_a)n}\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}}\right)} \mathbb{1}\left(\frac{Y_n - na}{\sqrt{c''(s_a)n}} > 0\right)\right]$$

$$= \int_0^\infty e^{-s_a\sqrt{c''(s_a)n}\, x}\, dF_n(x).$$

Merkitään lyhyesti

$$\psi_n = s_a \sqrt{c''(s_a)n}$$

Nyt

$$\int_0^\infty e^{-\psi_n x}\, dF_n(x) = \Big/_0^\infty e^{-\psi_n x} F_n(x) - \int_0^\infty F_n(x)\, d(e^{-\psi_n x})$$

$$= -F_n(0) + \int_0^\infty \psi_n e^{-\psi_n x} F_n(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty \psi_n e^{-\psi_n x} \left[F_n(x) - F_n(0)\right] dx$$

ja siis

$$J_n \mathbb{P}(Y_n > na) = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \psi_n^2 e^{-\psi_n x} \left[F_n(x) - F_n(0)\right] dx$$

$$= \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \psi_n e^{-x} \left[F_n\left(\frac{x}{\psi_n}\right) - F_n(0)\right] dx.$$

Lemman 2.4 nojalla

$$J_n \mathbb{P}(Y_n > na) = \sqrt{2\pi} \int_0^\infty \psi_n e^{-x} \left[\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) - \frac{\gamma_{s_a}\left(1 - \left(\frac{x}{\psi_n}\right)^2\right)\phi'\left(\frac{x}{\psi_n}\right)}{6\sqrt{n}} - \phi(0) + \frac{\gamma_{s_a}\, \phi'(0)}{6\sqrt{n}}\right] dx + o(1),$$

missä

$$\gamma_{s_a} = \mathbb{E}_{s_a}\left(\frac{(\xi - a)^3}{c''(a)^{3/2}}\right)$$

on ξ:n vinous konjugaattijakauman suhteen. Integrandi on dominoitu, sillä väliarvolauseen nojalla

$$\left| \phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) - \phi(0) \right| \le \frac{x}{\sqrt{2\pi}\,\psi_n}$$

ja

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left| y^2 \phi'(y) \right| < \infty .$$ Lisäksi jokaisella kiinteällä

$x \in \mathbb{R}$,

$$\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) = \phi(0) + \frac{x}{\psi_n} \phi'(0)\left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty,$$

ja

$$\phi'\left(\frac{x}{\psi_n}\right) = \phi'(0) + \phi''(0) \frac{x}{\psi_n} \left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty,$$

joten

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n e^{-x} \left[\phi\left(\frac{x}{\psi_n}\right) - \frac{\gamma_{3n}\left(1 - \left(\frac{x}{\psi_n}\right)^2\right) \phi'\left(\frac{x}{\psi_n}\right)}{6\sqrt{n}} - \phi(0) + \frac{\gamma_{3n}\, \phi'(0)}{6\sqrt{n}} \right]$$

$$= \phi'(0)\, x e^{-x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, x e^{-x}.$$

Siispä dominoidun konvergenssin nojalla

$$\lim_{n \to \infty} \psi_n \, \mathbb{P}(Y_n > na) = \int_0^\infty x e^{-x}\, dx = 1. \quad \square$$

3. Paksuhäntäisen satunnaiskulun vaellusaikateoriaa

Olkoon $\{Y_n\}$ ja T kuten kohdassa 2. Oletetaan nyt, että $\mu = \mathbb{E}(\xi) \in (-\infty, 0)$ ja että on olemassa raja-arvo

$$(3.1) \quad \lim_{x \to \infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$. Epätäsmällisesti, pätee

$$\mathbb{P}(\xi > x) \approx x^{-\alpha}, \quad x \text{ suuri.}$$

Täsmällisemmin, jos $\varepsilon > 0$ on annettu, niin

$$x^{-(\alpha+\varepsilon)} \le \mathbb{P}(\xi > x) \le x^{-(\alpha-\varepsilon)},$$

kun x on suuri. Olkoon $s > 0$ ja $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa sellainen $x_\varepsilon > 0$, että

$$\mathbb{E}(e^{s\xi}) \ge \mathbb{E}(e^{s\xi}\mathbb{1}(\xi \ge x)) \ge e^{sx}\,\mathbb{P}(\xi \ge x)$$

$$\ge e^{sx}\, x^{-(\alpha-\varepsilon)} \ge \frac{(sx)^n}{n!}\, x^{-(\alpha+\varepsilon)}, \quad \forall n,\ x > x_\varepsilon$$

Valitsemalla $n > \alpha + \varepsilon$ nähdään, että

$$\mathbb{E}(e^{s\xi}) = \infty, \quad \forall s > 0.$$

Kohdan 2 teoria ei ole käytettävissä, sillä nyt $R = 0$. Esimerkiksi konjugaattijakaumaan perustuva todistustekniikka ei ole hyödyllinen eikä lauseen 2.1 tulos myöskään päde.

Merkitään $F(x) = \mathbb{P}(\xi \le x)$ ja

$$\bar{F}(x) = \mathbb{P}(\xi > x), \quad x \in \mathbb{R},$$

sekä

$$M_n = \max(\xi_1, \dots, \xi_n).$$

<u>Lause 3.1</u> Olkoon $b > 0$. Edellä esitetyin oletuksin

(3.1.1) $$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0) = 1 - \alpha$$

ja

(3.1.2) $$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = 1 - \alpha.$$

Olkoon $c > 0$ kiinteä. On helppo nähdä, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > cU_0) = 1 - \alpha.$$

Tämä viittaa siihen, että vararikon tuloksessa (3.1.1) aiheuttaa yksi suuri ξ_j, $j \le bU_0$.

Esitetään muutama lemma ennen lauseen todistamista.

Lemma 3.1.1. Olkoon $a>0$, $\mathbb{P}(\eta\in[0,a])=1$ ja $\mathbb{P}(\eta>0)>0$ sekä $h>0$. Silloin

$$(3.2)\qquad \mathbb{E}(e^{h\eta}) \le \frac{e^{ha}-1}{a}\,\mathbb{E}(\eta)+1$$

ja

$$(3.2.1)\qquad \mathbb{E}(e^{h\eta}) \le \frac{e^{ha}-1-ha}{a^2}\,\mathbb{E}(\eta^2)+1+h\mathbb{E}(\eta).$$

Todistus. Eksponenttifunktion sarjakehitelmän nojalla

$$x\mapsto \frac{e^{hx}-1}{x}$$

ja

$$x\mapsto \frac{e^{hx}-1-hx}{x^2}$$

määrittelevät kasvavat funktiot alueessa $x\in(0,\infty)$. Siispä

$$\mathbb{E}(e^{h\eta}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{h\eta}-1}{\eta}\,\eta\,1(\eta>0)\right)+1 \le \frac{e^{ha}-1}{a}\,\mathbb{E}(\eta)+1$$

ja

$$\mathbb{E}(e^{h\eta}) = \mathbb{E}\left(\frac{e^{h\eta}-1-h\eta}{\eta^2}\,\eta^2 1(\eta>0)\right)+1+h\mathbb{E}(\eta) \le \frac{e^{ha}-1-ha}{a^2}\,\mathbb{E}(\eta^2)+1+h\mathbb{E}(\eta). \quad \square$$

Lemma 3.1.2. Olkoot $f_1, f_2 : (0,\infty) \to (0,\infty)$ mielivaltaisia, ja

$$\beta_j = \limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log f_j(x) \in [-\infty, \infty], \quad j = 1, 2.$$

Silloin

$$\limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log (f_1(x) + f_2(x))$$

$$= \limsup_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log (\max (f_1(x), f_2(x)))$$

$$= \min (\beta_1, \beta_2).$$

Todistus. Tulokset seuraavat suoraviivaisesti epäyhtälöistä

$$\max(f_1(x), f_2(x)) \leq f_1(x) + f_2(x) \leq 2 \max(f_1(x), f_2(x)), \quad x > 0. \qquad \square$$

<u>Lemma 3.2.</u> Olkoon $\delta > 0$. Silloin lauseen 3.1 oletuksin

$$(3.3) \qquad \lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > 0,\ M_n \le n^{1-\delta}) = -\infty$$

ja

$$(3.4) \qquad \lim_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0,\ M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta}) = -\infty.$$

<u>Todistus.</u> Olkoon $\varepsilon > 0$, $h = h_n = n^{-1+\delta/2}$ ja

$$\xi' = \xi\, \mathbb{1}(\xi \le n^{1-\delta}).$$

Osoitetaan aluksi, että voidaan määrätä sellainen $\varepsilon' > 0$, että

$$(3.5) \qquad \mathbb{E}(e^{h\xi'}) \le e^{-h\varepsilon'},$$

kun n on riittävän suuri.

Olkoon $\varepsilon'' > 0$. Koska $\mu < \infty$, voidaan määrätä sellainen $c > 0$, että

$$\mathbb{E}(\max(\xi, -c)) < \mu + \varepsilon''.$$

Olkoon

$$\xi'' = \max(\xi', -c) + c.$$

Tällöin $\mathbb{P}(\xi'' \in [0, n^{1-\delta} + c]) = 1$. Merkitään $\mu'' = \mathbb{E}(\xi'')$. Lemman 3.1.1 nojalla

$$\mathbb{E}(e^{h\xi''}) \le \frac{e^{h(n^{1-\delta}+c)}-1}{n^{1-\delta}+c}\,\mu'' + 1.$$

Koska $h(n^{1-\delta}+c) \to 0$, kun $n \to \infty$, ja

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1,$$

niin

$$\mathbb{E}(e^{h\xi''}) \le (1+\varepsilon)h\mu'' + 1 \le e^{(1+\varepsilon)h\mu''},$$

kun n on suuri. Nähdään, että

$$\mathbb{E}(e^{h\xi'}) \le \mathbb{E}(e^{h\xi''})e^{-hc}$$

$$\le e^{(1+\varepsilon)h(\mu+\varepsilon''+c)-hc}$$

$$= e^{h((1+\varepsilon)\mu+(1+\varepsilon)\varepsilon''+\varepsilon c)}.$$

Yläraja (3.5) saadaan valitsemalla ensin ε'' pieneksi (mikä kiinnittää c:n) ja sen jälkeen ε riittävän pieneksi, sillä $\mu < 0$.

Todistetaan (3.3). Olkoon

$$\xi_j' = \xi_j 1(\xi_j \le n^{1-\delta}), \quad j = 1, 2, \dots,$$

ja

$$Y_n' = \xi_1' + \dots + \xi_n'.$$

Tshebyshevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{E}(e^{hY_n'}) \ge \mathbb{E}(e^{hY_n'} 1(Y_n' > 0)) \ge \mathbb{P}(Y_n' > 0).$$

Arvion (3.5) nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n' > 0) \le (e^{-h\varepsilon'})^n = e^{-n^{\delta/2}\varepsilon'}.$$

Saadaan

$$\limsup_{n \to \infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n' > 0) = -\infty.$$

Väite seuraa tästä, sillä

$$\mathbb{P}(Y_n > 0, M_n \le n^{1-\delta}) \le \mathbb{P}(Y_n' > 0).$$

Todistetaan (3.4). Selvästi

$$\mathbb{P}(T \le bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta})$$

$$\le \sum_{n \le bU_0} \mathbb{P}(Y_n > U_0, M_n \le U_0^{1-\delta})$$

$$\le \sum_{n \le bU_0} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i 1(\xi_i \le U_0^{1-\delta}) > U_0 \right).$$

Epäyhtälön (3.5) nojalla

$$\mathbb{E}\left(e^{h'\xi} 1(\xi \le U_0^{1-\delta}) \right) \le e^{-h'\varepsilon'},$$

missä $h' = h'(U_0) = U_0^{-1+\delta/2}$ ja U_0 on suuri.

Tsebyshevin epäyhtälön nojalla

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i 1(\xi_i \le U_0^{1-\delta}) > U_0 \right)$$

$$\le e^{-h'U_0} \left(e^{-h'\varepsilon'}\right)^n \le e^{-h'U_0} = e^{-U_0^{\delta/2}}.$$

Saadaan siis

$$\mathbb{P}(T \le bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta}) \le bU_0 e^{-U_0^{\delta/2}},$$

josta (3.4) seuraa. $\square$

<u>Lauseen 3.1 todistus</u>. Ilmeisesti

$$\mathbb{P}(T \le bU_0) \le \mathbb{P}(T \le bU_0, M_{\lfloor bU_0 \rfloor} \le U_0^{1-\delta}) + \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}).$$

Nyt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) &= 1 - \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) \\
&= 1 - \left(1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta})\right)^{\lfloor bU_0 \rfloor} \\
&\le 1 - e^{bU_0 \log(1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta}))}
\end{aligned}$$

Koska

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1-x)}{x} = -1,$$

niin

$$\log(1 - \bar{F}(U_0^{1-\delta})) \ge -(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta}),$$

kun U_0 on suuri. Valitsemalla δ pieneksi saadaan

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta}) &\le 1 - e^{-bU_0(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta})} \\
&= 1 - \left(1 - bU_0(1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta})\right)(1 + o(1)) \\
&= (1+o(1))\, bU_0 (1+\delta)\bar{F}(U_0^{1-\delta}).
\end{aligned}$$

Raja-arvon (3.1) nojalla

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(M_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0^{1-\delta})$$

$$\le 1 + \limsup_{U_0 \to \infty} (1-\delta)(\log U_0^{1-\delta})^{-1} \log \bar{F}(U_0^{1-\delta})$$

$$= 1 - (1-\delta)\alpha.$$

Antamalla δ:n mennä kohti nollaa saadaan

$$(3.7)\quad \limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le b U_0) \le 1-\alpha.$$

Johdetaan ylärajoja todennäköisyydelle $\mathbb{P}(T\in (U_0,\infty))$. Olkoon $\delta>0$. Mielivaltaiselle $y\ge 1$ pätee

$$(3.8)\quad \mathbb{P}(T\in [U_0^y, U_0^{y+\delta}])$$

$$\le \mathbb{P}(Y_n>0 \text{ jollain } n\in[U_0^y, U_0^{y+\delta}],\ M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} \le U_0^{y(1-\delta)})$$

$$+ \mathbb{P}(Y_n>0 \text{ jollain } n\in[U_0^y, U_0^{y+\delta}],\ M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > U_0^{y(1-\delta)}).$$

Olkoon $Q_1(U_0,y)$ ensimmäinen ja $Q_2(U_0,y)$ toinen (3.8):n oikean puolen todennäköisyyksistä. Olkoon $\beta>\alpha$. Lemman 3.2 nojalla

$$Q_1(U_0,y) \le \sum_{n\in[U_0^y, U_0^{y+\delta}]} \mathbb{P}(Y_n>0,\ M_n \le n^{1-\delta})$$

$$(3.9)\quad \le U_0^{y+\delta}\, U_0^{-y\beta} \le U_0^{\delta+y(1-\beta)},\ \text{kun } U_0 \text{ on suuri.}$$

Arvio on tasainen alueessa $y\ge1$ (ts. voidaan valita $\bar U$ siten, että epäyhtälö pätee kaikilla $y\ge1$, kunhan $U_0\ge\bar U$). Edelleen

$$Q_2(U_0,y) \le \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > U_0^{y(1-\delta)})$$

$$\le \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor^{\frac{y(1-\delta)}{y+\delta}})$$

$$= \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor^{1-\delta-\frac{\delta(1-\delta)}{y+\delta}})$$

$$\le \mathbb{P}(M_{\lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor} > \lfloor U_0^{y+\delta}\rfloor^{1-\delta'})$$

missä $\delta'=\delta+\frac{\delta(1-\delta)}{1+\delta}$. Kuten (3.6):issa nähdään, että annetulle $\varepsilon>0$ voidaan määrätä δ siten, että

$$Q_2(U_0,y) \le U_0^{-y(\alpha-1-\varepsilon)}, \quad \forall y \ge 1,$$

kun $U_0 > \bar{U}$ ($\bar{U}$ ei riipu y:stä). Yhdistämällä tulokset saadaan

$$\mathbb{P}(T \in (U_0,\infty)) \le \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\left(T \in \left[U_0^{1+j\delta}, U_0^{1+(j+1)\delta}\right]\right)$$

$$\le U_0^{1+\delta-\beta} \sum_{j=0}^{\infty} U_0^{j\delta(1-\beta)} + U_0^{1-\alpha+\varepsilon} \sum_{j=0}^{\infty} U_0^{-j\delta(\alpha-1-\varepsilon)}.$$

Molemmat sarjat suppenevat, kun ε on pieni ja siis

$$\mathbb{P}(T \in (U_0,\infty)) \le K U_0^{1-\alpha+\varepsilon},$$

kun U_0 on suuri, missä K on vakio. Yhdistämällä tämä arvioon (3.2) ja antamalla $\varepsilon \to 0+$ saadaan lemmasta 3.1.2

(3.10) $$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T<\infty) \le 1-\alpha.$$

Olkoon $b \in (0,1)$ mielivaltainen. Lauseen molemmat väitteet tulevat todistetuksi, jos tällöin

(3.10.1) $$\liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0) \ge 1-\alpha,$$

kun U_0 on suuri, pätee annetulle $\varepsilon>0$,

(3.11) $$\mathbb{P}(T \le bU_0) \ge \mathbb{P}(Y_{\lfloor bU_0 \rfloor} > U_0)$$

$$\ge \lfloor bU_0 \rfloor \mathbb{P}\left(\xi_1 > U_0^{1+\varepsilon}, \ \xi_i \le U_0^{1+\varepsilon}, i=2,\dots,\lfloor bU_0\rfloor, \ Y_{\lfloor bU_0\rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor bU_0 \rfloor(\mu-\varepsilon)\right)$$

$$= \lfloor bU_0 \rfloor \bar{F}(U_0^{1+\varepsilon}) \mathbb{P}\left(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon}, i=2,\dots,\lfloor bU_0\rfloor, \ Y_{\lfloor bU_0\rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor bU_0 \rfloor(\mu-\varepsilon)\right).$$

Kuten (3.6):ssa nähdään, että

$$\mathbb{P}(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon},\ i=2,\dots,\lfloor bU_0\rfloor) \ge \exp(-bU_0\bar{F}(U_0^{1+\varepsilon})(1+\varepsilon)),$$

kun U_0 on suuri. Koska $\alpha > 1$, niin

$$\lim_{U_0\to\infty} \mathbb{P}(\xi_i \le U_0^{1+\varepsilon},\ i=2,\dots,\lfloor bU_0\rfloor) = 1.$$

Suurten lukujen lain nojalla

$$\lim_{U_0\to\infty} \mathbb{P}(Y_{\lfloor bU_0\rfloor} - \xi_1 \ge \lfloor bU_0\rfloor(\mu-\epsilon)) = 1.$$

Arvion (3.11) nojalla

$$\liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le bU_0)$$

$$\ge \liminf_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log\left(\lfloor bU_0\rfloor \bar{F}(U_0^{1+\epsilon})\right) = 1-(1+\epsilon)\alpha.$$

Alaraja (3.10.1) seuraa tästä. $\square$

3.1. Osasummien suurista poikkeamista

Olkoon satunnaiskulku $\{Y_n\}$ kuten kohdan 3 alussa. Oletetaan, kuitenkin nyt vain, että $\mu \in \mathbb{R}$. Lisäksi oletetaan, että (3.1) pätee ja että $\alpha \in (1, \infty)$.

Lause 3.3. Olkoon $a > \mu$ kiinteä. Edellä esitetyin oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) = 1 - \alpha.$$

Todistetaan ensin hieman yleisempi versio lemman 3.2 ensimmäisestä tuloksesta.

Lemma 3.4. Olkoon $\delta > 0$. Silloin lauseen 3.3 oletuksin

$$\lim_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na,\ M_n \leq n^{1-\delta}) = -\infty.$$

Todistus. Selvästi

$$\mathbb{P}(Y_n > na,\ M_n \leq n^{1-\delta})$$

$$= \mathbb{P}((\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a) > 0,\ \max(\xi_1 - a, \dots, \xi_n - a) \leq n^{1-\delta} - a)$$

$$\leq \mathbb{P}((\xi_1 - a) + \dots + (\xi_n - a) > 0,\ \max(\xi_1 - a, \dots, \xi_n - a) \leq n^{1-\delta/2}),$$

kun n on suuri. Väite seuraa lemmasta 3.2. $\square$

Lauseen 3.3 todistus. Lemman 3.4 nojalla

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \le n\bar{F}(n^{1-\delta}) + n^{-\varkappa},$$

kun n on suuri, missä $\varkappa > 0$ on kiinteä (mutta suuri). Nähdään, että

$$\limsup_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) \le 1 - (1-\delta)\alpha.$$

Toisaalta annetulle $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(Y_n > na) \ge n\,\mathbb{P}(\xi_1 > n^{1+\varepsilon}, \xi_i \le n^{1+\varepsilon}, i=2,\dots,n, Y_n - \xi_1 > n(\mu-\varepsilon))$$

$$= n\bar{F}(n^{1+\varepsilon})\,\mathbb{P}(\xi_i \le n^{1+\varepsilon}, i=2,\dots,n, Y_n - \xi_1 > n(\mu-\varepsilon)).$$

Viimeinen todennäköisyys suppenee kohti ykköstä, joten

$$\liminf_{n\to\infty} (\log n)^{-1} \log \mathbb{P}(Y_n > na) \ge 1 - (1+\varepsilon)\alpha.$$

Lemman väite seuraa saaduista tuloksista. $\square$