Riskiteorian jatkokurssi 15.5.2012

1. Olkoon $\alpha \in (0, 1/2)$ vakio ja vuotuinen tappio $\xi = X - P$, missä $P = 1$ ja X:llä on geometrinen jakauma,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-\alpha)\alpha^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Olkoon c muuttujan ξ kumulantit generoiva funktio. Olkoot $\xi_1, \xi_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin ξ. Olkoon edelleen $Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$ ja T satunnaiskulkuun $\{Y_n\}$ liittyvä vararikkohetki alkupääomalla U_0. Oletetaan, että $U_0 \in \mathbb{N}$.

a) Osoita, että yhtälöllä $c(s) = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen juuri R.

b) Olkoon $\beta = \alpha e^R$. Osoita, että

$$\mathbb{P}_R(Y_T - U_0 = N) = (1-\beta)\beta^{N-1}, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

2. Olkoon $Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, missä $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Lisäksi $U_0 > 0$ kuvaa yhtiön alkupääomaa ja vararikkohetki $T = T(U_0)$ on ensimmäinen vuosi n, jolle $Y_n > U_0$ (mahdollisesti $T = +\infty$). Oletetaan, että $\mu = \mathbb{E}(\xi) \in (-\infty, 0)$,

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$, ja että

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x(1-\varepsilon))}{\overline{F}(x)} = 1.$$

a) Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Osoita, että

$$\liminf_{U_0\to\infty} \frac{\mathbb{P}(T \le N)}{N\overline{F}(U_0)} \ge 1.$$

b) Olkoon $a > \mu$. Osoita, että

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y_n > na)}{n\overline{F}(n(a-\mu))} \ge 1.$$

3. Olkoot $d, d_1, d_2, \ldots$ ja $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ kaksi jonoa riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan myös, että ξ-muuttujat ovat riippumattomia d-muuttujista ja että on olemassa sellainen yksikäsitteinen $R' > 1$, että $\mathbb{E}(d^{R'}) = 1$. Olkoon edelleen

$$Y'_n = \sum_{j=1}^{n} d_1 \cdots d_{j-1}\xi_j, \quad n \in \mathbb{N}$$

ja $\overline{Y}' = \sup\{Y'_1, Y'_2, \ldots\}$. Oletetaan tunnetuksi, että $\overline{Y}' < \infty$ m.v.

a) Osoita, että $\overline{Y}' =_L \xi + d\max(0, \overline{Y}')$.

b) Oletetaan lisäksi, että $\mathbb{P}(\xi \ge 0) = 1$. Määrää $\mathbb{E}(\overline{Y}')$ muuttujien d ja ξ origomomenttien avulla.