Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 7, 7.5.2012

1. Tarkastellaan kohdan 4.1 mukaista mallia lauseen 4.3 oletuksin. Oletetaan, että $R' > 1$. Olkoon $s \in (R', \infty)$ sellainen, että $c(t) < \infty$ eräälle $t > s$ ja olkoon $x = 1/c'(s)$. Oletetaan, että $\mathbb{E}(|\ \xi\ |^s) < \infty$ ja merkitään

$$V = V(x, U_0) = \sup\{Y'_j \mid j \leq x \log U_0\}.$$

Osoita, että on olemassa sellainen U_0:sta riippumaton vakio $K \in (0, \infty)$, että

$$\mathbb{E}(V^s \mathbf{1}(V > 0)) \leq K U_0^{xc(s)}.$$

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\limsup_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \leq x \log U_0) \leq -xc^*(1/x).$$

3. Olkoot $d, d_1, d_2, \ldots$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja

$$\xi_j = -1 + d_j, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Oletetaan, että $\mathbb{E}(d^s) \in (-\infty, 0)$ jollain $s > 0$. Olkoon edelleen

$$Y'_n = \sum_{j=1}^{n} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Osoita, että raja-arvo

$$Y'_\infty = \lim_{n \to \infty} Y'_n = \sum_{j=1}^{\infty} d_1 \cdots d_{j-1} \xi_j$$

on äärellisenä olemassa m.v. ja määrää Y'_∞.

4. (jatkoa) Olkoon

$$T = \inf\{n | Y'_n > U_0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Oletetaan, että $\mathbb{E}(d^{R'}) = 1$ ja $\mathbb{E}(d^s) \in (1, \infty)$ eräille $0 < R' < s < \infty$. Määrää

$$\lim_{U_0 \to \infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty).$$

5. Oletataan lauseessa 4.3 lisäksi, että $R' \in (2, \infty)$ ja että $\mathbb{P}(\xi \geq 0) = 1$. Olkoon $\bar{Y}'$ kuten kaavassa (4.5.1). Määrää

$$\mathbb{E}\left((\bar{Y}')^2\right)$$

muuttujien ξ ja d kahden alimman origomomentin avulla.