Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 5, 2.4.2012

Huom. Luento to 29.3. on siirretty –> ti 17.4. klo 16-18, sali C124

Kaikissa tehtävissä $Y_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n \in \mathbb{N}$, missä $\xi, \xi_1, \xi_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Lisäksi $U_0 > 0$ kuvaa yhtiön alkupääomaa ja vararikkohetki $T = T(U_0)$ on ensimmäinen vuosi n, jolle $Y_n > U_0$ (mahdollisesti $T = +\infty$). Oletetaan myös, että $\mathbb{E}(\xi) \in (-\infty, 0)$ ja että

$$\lim_{x\to\infty} (\log x)^{-1} \log \mathbb{P}(\xi > x) = -\alpha,$$

missä $\alpha \in (1, \infty)$.

1. Oletetaan lisäksi, että

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x(1-\varepsilon))}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Olkoon $N \in \mathbb{N}$ kiinteä. Osoita, että

$$\liminf_{U_0\to\infty} \frac{\mathbb{P}(T \le N)}{N\overline{F}(U_0)} \ge 1.$$

2. (jatkoa) Olkoon $\varepsilon \in (0, 1)$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T \le N) \le \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(T \le N, \xi_n > U_0/N)$$

ja

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}\left(T \le N,\, \xi_n \in (U_0/N, (1-\varepsilon)U_0]\right) \\ \le\ & \overline{F}(U_0/N)\, \mathbb{P}(T(\varepsilon U_0) \le N-1), \qquad n = 1, \ldots, N. \end{aligned}$$

3. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{U_0\to\infty} \frac{\mathbb{P}(T \le N)}{N\overline{F}(U_0)} = 1.$$

4. Olkoon $y \in (0, 1)$ kiinteä. Osoita, että

$$\limsup_{U_0\to\infty} (\log U_0)^{-1} \log \mathbb{P}(T \le U_0^y) \le y - \alpha.$$

5. (jatkoa tehtävään 4) Osoita, että kaikilla $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{U_0\to\infty} \mathbb{P}\left((1-\varepsilon)\log U_0 < \log T < (1+\varepsilon)\log U_0 \,|\, T < \infty\right) = 1.$$