

Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 4, 19.3.2012

1. Olkoon $\alpha \in (0, 1/2)$ vakio ja vuotuinen tappio $\xi = X - P$, missä $P = 1$ ja X :llä on geometrinen jakauma,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1 - \alpha)\alpha^k, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Olkoon c muuttujan ξ kumulantit generoiva funktio. Osoita, että yhtälöllä $c(s) = 0$ on yksikäsitteinen positiivinen juuri R . Millaisia ovat ξ :n konjugaattijakaumat.

2. (jatkoa) Olkoot ξ_1, ξ_2, \dots riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin ξ . Olkoon edelleen $Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ ja T satunnaiskulkuun $\{Y_n\}$ liittyvä vararikkohetki alkupääomalla U_0 . Oletetaan, että $U_0 \in \mathbb{N}$ ja olkoon $\beta = \alpha e^R$. Osoita, että

$$\mathbb{P}_R(Y_T - U_0 = N) = (1 - \beta)\beta^{N-1}, \quad N = 1, 2, \dots$$

3. (jatkoa) Osoita, että

$$\mathbb{P}(T < \infty) = \frac{(1 - \beta)e^{-RU_0}}{e^R - \beta}.$$

4. Olkoon $\xi = X - P$, missä ξ on eksponentiaalisesti jakautunut parametrilla 1 ja $P = 1.1$. Olkoot ξ_1, ξ_2, \dots riippumattomia ja samoin jakautuneita kuin ξ ja $Y_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Arvioi todennäköisyyksiä $\mathbb{P}(Y_{400} > 0)$ ja $\mathbb{P}(Y_{900} > 0)$

a) keskeisen raja-arvolauseen avulla

b) lauseen 2.5 avulla.

(Tarkat arvot: $\mathbb{P}(Y_{400} > 0) = 0.02380$, $\mathbb{P}(Y_{900} > 0) = 0.00177$.)

5. (jatkoa) Esitä ylärajat edellisen tehtävän todennäköisyyksille nojautuen

a) Berry-Esseen approksimaatioon

b) kumulantit generoivan funktion konvekseen kojugaattiin.