Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 2, 13.2.2012

Kaikissa tehtävissä $\eta, \eta_1, \eta_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita positiivisia satunnaismuuttujia ja $\{S_n\}$, $S_n = \eta_1 + \cdots + \eta_n$, on näistä syntyvä uusiutumisprosessi. Oletetaan, että η:n jakauma F ei ole aritmeettinen ja että $\mu = \mathbb{E}(\eta)$ on äärellinen.

1. Tarkastellaan uusiutumisyhtälöä

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)dF(y),$$

missä $z(x) = \mathbf{1}(0 \leq x < h)$ ja $h > 0$ on vakio. Olkoon Z sellainen ratkaisu, joka on rajoitettu äärellisillä väleillä.

a) Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} Z(x) = \mu^{-1}h.$$

b) Osoita, että uusiutumismitalle U pätee

$$\lim_{x\to\infty} (U(x) - U(x-h)) = \mu^{-1}h.$$

2. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty} \frac{U(x)}{x} = \mu^{-1}.$$

3. Oletetaan, että $\sigma^2 = \mathrm{Var}(\eta)$ on äärellinen. Olkoon

$$z(x) = \frac{1}{\mu}\int_x^\infty (1 - F(y))\,dy, \quad x \geq 0.$$

Osoita, että

$$Z(x) = U(x) - \frac{x}{\mu}$$

on uusiutumisyhtälön

$$Z(x) = z(x) + \int_0^x Z(x-y)\,dF(y)$$

ratkaisu alueessa $x \geq 0$.

4. (jatkoa) Osoita, että

$$\int_0^\infty z(x)\,dx = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu}.$$

5. (jatkoa) Osoita, että

$$\lim_{x\to\infty}\left(U(x) - \frac{x}{\mu}\right) = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2}.$$