Riskiteorian jatkokurssin laskuharjoitus 1, 30.1.2012

Kaikissa tehtävissä $Y_n = V_1 + \cdots + V_n$, $n \in \mathbb{N}$, missä $V, V_1, V_2, \ldots$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia. Lisäksi $U_0 > 0$ kuvaa yhtiön alkupääomaa ja vararikkohetki T on ensimmäinen vuosi n, jolle $Y_n > U_0$ (mahdollisesti $T = +\infty$). Olkoon c muuttujan V kumulantit generoiva funktio. Oletetaan, että c on äärellinen eräässä origon ympäristössä ja aidosti konveksi äärellisyysalueessaan (mikä pätee, jos $\mathrm{Var}(V) > 0$). Olkoon edelleen $\mathbb{E}(V) < 0$.

1. Oletetaan, että $c(s) < 0$ kaikilla $s \in (0, R]$ ja $c(s) = \infty$ kaikilla $s > R$, missä R on positiivinen vakio. Osoita, että

$$\mathbb{P}(T < \infty) \leq e^{-RU_0}.$$

2. (jatkoa) Oletetaan lisäksi, että $c'(R-)$ on olemassa (ja äärellinen). Osoita, että

$$c^*(v) = Rv - c(R),$$

kun $v > c'(R-)$. Tehtävässä oletetaan tunnetuksi, että

$$\lim_{s \to R-} c'(s) = c'(R-)$$

ja että c rajoitettuna joukkoon $\mathcal{D} = \{s; c(s) < \infty\}$ on jatkuva.

3. (jatkoa tehtävään 2) Osoita, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} U_0^{-1} \log \mathbb{P}(T < \infty) = -R.$$

4. (jatkoa tehtävään 2) Oletetaan lisäksi, että $c'(R-) > 0$. Osoita, että

$$\mathbb{P}(xU_0 \leq T < \infty) \leq e^{-xc^*(1/x)U_0}, \qquad \forall x \in (0, 1/c'(R-)).$$

5. (jatkoa tehtävään 4) Osoita, että

$$\lim_{U_0 \to \infty} \mathbb{P}(T \leq xU_0 | T < \infty) = 1, \qquad \forall x > 0.$$