MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS
Osittaisdifferentiaaliyhtälöt
Harjoitus 9
Malliratkaisut (Jussi Martin)

1. Laske

$$\int_\gamma \partial_{\nu(\bar{y})} \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\sigma(\bar{y}),$$

kun γ on $\bar{x}$-keskisen, ρ-säteisen kiekon reuna. (tässä $\rho > 0$ ja muut merkinnät kuten luennoissa, esim. kaava (9.5.) Vektorianalyysistä muistamme, että suunattu derivaatta on gradientin ja suuntavektorin sisätulo.)

Ratkaisu
Voidaan olettaa, että $\bar{x} = \bar{0}$ (esim. tekemällä muutujanvaihto $\bar{y} \mapsto \bar{y} - \bar{x}$). Nyt

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \log \frac{1}{|\bar{y}|} = |\bar{y}| \frac{\partial}{\partial y_i} \Big(\big(\sum_{i=1]}^{2} y_i^2 \big)^{-\frac{1}{2}} \Big) = |\bar{y}| \Big(-\frac{1}{2} (y_1^2 + y_2^2)^{-\frac{3}{2}} (2y_i) \Big) = -\frac{y_i}{|\bar{y}|^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \nabla \log \frac{1}{|\bar{y}|} = -\frac{-\bar{y}}{|\bar{y}|^2} \quad \Longrightarrow \quad \partial_{\nu(\bar{y})} \log \frac{1}{|\bar{y}|} = \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|} \cdot \frac{-\bar{y}}{|\bar{y}|^2} = -\frac{1}{|\bar{y}|}$$

joten tekemällä muuttujanvaihto $\bar{y}(\varphi) = (\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi))$ saadaan

$$\int_\gamma \partial_{\nu(\bar{y})} \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\sigma(\bar{y}) = -\int_\gamma \frac{d\sigma}{|\bar{y}|} = -\int_0^{2\pi} \frac{\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2(\varphi) + \rho^2\sin^2(\varphi)}}$$

$$= -\int_0^{2\pi} \frac{\rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2}} = -\int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi.$$

2. Olettaen, että $u = u(\bar{x})$, $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, on harmoninen, osoita, että sen Kelvin-inversio,

$$v(\bar{x}) = \frac{1}{|\bar{x}|^{n-2}} u\left(\frac{\bar{x}}{|\bar{x}|^2}\right)$$

on myös määrittelyalueessaan harmoninen.

Ratkaisu,

Käyttämällä pallokoordinaatteja $\mathbb{R}^n$:ssä saadaan Laplace-operaattori:

muotoon

$$\Delta u = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_\varphi w,$$

missä $w(r, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$

$= u(r\cos\varphi_1, r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \dots, r\sin\varphi_1\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1})$

on funktio u lausuttuna pallokoordinaattien

$$x_1 = r\cos\varphi_1$$
$$x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2$$
$$\vdots$$
$$x_n = r\sin\varphi_1 \dots \sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}$$

funktiona

$\Delta\varphi$ on operaattorin pelkät kulmaderivaatat sisältävä osa,

käytetään jatkossa notaatiota u ja v tarkoittamaan myös vastaavia funktioita lausuttuna pallokoordinaatien suhteen.

Nyt
$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta\varphi v.$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^{n-2}} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)\right)$$

$$= \frac{2-n}{r^{n-1}} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{r^{n-2}} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)\left(-\frac{1}{r^2}\right)$$

$$= \frac{2-n}{r^{n-1}} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) - \frac{1}{r^n} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)$$

(Huom! Notaatio $\frac{\bar{x}}{r^2} := \left(\frac{r}{r^2}, \phi_1, \dots, \phi_{n-1}\right) = (r^{-1}, \phi_1, \dots, \phi_{n-1})$)

$\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \frac{(2-n)(1-n)}{r^n} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) - \frac{2-n}{r^{n-1}} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)\frac{1}{r^2} + \frac{n}{r^{n+1}} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)$$
$$+ \frac{1}{r^n} u_{rr}\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)\frac{1}{r^2}$$

$$= \frac{(2-n)(1-n)}{r^n} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) + \frac{2(n-1)}{r^{n+1}} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{r^{n+2}} u_{rr}\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)$$

Jolloin

$$\Delta v = \frac{(2-n)(1-n)}{r^n} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) + \frac{2(n-1)}{r^{n+1}} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{r^{n+2}} u_{rr}\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)$$
$$+ \frac{n-1}{r}\left(\frac{2-n}{r^{n-1}} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) - \frac{1}{r^n} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)\right) + \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{1}{r^{n-2}}}_{=\frac{1}{r^n}} \Delta_\varphi u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)$$

$$= \cancel{\frac{(2-n)(1-n)}{r^n} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)} + \cancel{2}\frac{(n-1)}{r^{n+1}} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{r^{n+2}} u_{rr}\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)$$
$$\cancel{- \frac{(2-n)(1-n)}{r^n} u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)} \cancel{- \frac{n-1}{r^{n+1}} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)} + \frac{1}{r^n} \Delta_\varphi u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)$$

$$= \frac{1}{r^{n+2}}\left(u_{rr}\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) + \frac{n-1}{(1/r)} u_r\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right) + \frac{1}{\left(\frac{1}{r^2}\right)} \Delta_\varphi u\left(\frac{\bar{x}}{r^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{r^{n+2}} \Delta u = 0,$$ koska funktio u on harmoninen.

Nyt siis $\Delta v = 0$ ja siten v on myös harmoninen.

3. Olkoon G yksikkökiekon Greenin funktio,

$$G(\bar{x}, \bar{y}) = \log\left(\frac{1}{r}\frac{|\bar{x} - r^2\bar{y}|}{|\bar{x} - \bar{y}|}\right),$$

vertaa luentojen kaava (8.63); tässä $r = |\bar{x}|$. Laske tämän normaaliderivaatta kiekon reunalla, $\partial_{\nu(\bar{y})} G(\bar{x}, \bar{y})$ ja vertaa tulosta Poisson'n ytimen lausekkeeseen; kaavat (8.26) ja (8.60).

Ratkaisu

Nyt

$$\frac{\partial G(\bar{x},\bar{y})}{\partial y_i} = \Big(\frac{1}{r}\frac{|\bar{x}-r^2\bar{y}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\Big)^{-1} \frac{\partial}{\partial y_i}\Big(\frac{1}{r}\frac{|\bar{x}-r^2\bar{y}|}{|\bar{x}-\bar{y}|}\Big)$$

$$= \frac{r|\bar{x}-\bar{y}|}{|\bar{x}-r^2\bar{y}|}\frac{1}{r}\left(\frac{|\bar{x}-\bar{y}|\frac{\partial}{\partial y_i}|\bar{x}-r^2\bar{y}| - |\bar{x}-r^2\bar{y}|\frac{\partial}{\partial y_i}|\bar{x}-\bar{y}|}{|\bar{x}-\bar{y}|^2}\right)$$

$$= \frac{1}{|\bar{x}-r^2\bar{y}||\bar{x}-\bar{y}|}\left(|\bar{x}-\bar{y}|\frac{r^4 y_i - r^2 x_i}{|\bar{x}-r^2\bar{y}|} - |\bar{x}-r^2\bar{y}|\frac{y_i - x_i}{|\bar{x}-\bar{y}|}\right)$$

$$= \frac{r^4 y_i - r^2 x_i}{|\bar{x}-r^2\bar{y}|^2} - \frac{y_i - x_i}{|\bar{x}-\bar{y}|^2}. \quad \Longrightarrow \quad \nabla G(\bar{x},\bar{y}) = r^2\frac{r^2\bar{y}-\bar{x}}{|\bar{x}-r^2\bar{y}|^2} - \frac{\bar{y}-\bar{x}}{|\bar{x}-\bar{y}|^2}$$

ja koska $\nu(\bar{y}) = \frac{\bar{y}}{|\bar{y}|}$ saamme, että

$$\partial_{\nu(\bar{y})} G(\bar{x},\bar{y}) = r^2\frac{\frac{\bar{y}\cdot r^2\bar{y}}{|\bar{y}|} - \frac{\bar{y}\cdot\bar{x}}{|\bar{y}|}}{|\bar{x}-r^2\bar{y}|^2} - \frac{\frac{\bar{y}\cdot\bar{y}}{|\bar{y}|} - \frac{\bar{y}\cdot\bar{x}}{|\bar{y}|}}{|\bar{x}-\bar{y}|^2} = r^2\frac{\frac{r^2|\bar{y}|^2}{|\bar{y}|} - \frac{\bar{y}\cdot\bar{x}}{|\bar{y}|}}{|\bar{x}-r^2\bar{y}|^2} - \frac{\frac{|\bar{y}|^2}{|\bar{y}|} - \frac{\bar{y}\cdot\bar{x}}{|\bar{y}|}}{|\bar{x}-\bar{y}|^2}$$

$$= r^2\frac{r^2 - \bar{y}\cdot\bar{x}}{|\bar{x}-r^2\bar{y}|^2} - \frac{1-\bar{y}\cdot\bar{x}}{|\bar{x}-\bar{y}|^2},$$

missä viimeinen yhtälö seuraa siitä että $\bar{y}$ on yksikkökiekon reunalla ($|\bar{y}| = 1$). Toisaalta, koska

$$|\bar{x}-r^2\bar{y}|^2 = (\bar{x}-r^2\bar{y})\cdot(\bar{x}-r^2\bar{y}) = |\bar{x}|^2 - 2r^2\cos(\bar{x},\bar{y}) + r^4|\bar{y}|^2$$

$$r^2 - 2r^2\cos(\bar{x},\bar{y}) + r^4 = r^2\big(1 - 2\cos(\bar{x},\bar{y}) + r^2\big)$$

ja

$$|\bar{x}-\bar{y}|^2 = |\bar{x}|^2 - 2\cos(\bar{x},\bar{y}) + |\bar{y}|^2 = r^2 - 2\cos(\bar{x},\bar{y}) + 1,$$

sillä $|\bar{x}| = r$ ja $|\bar{y}| = 1$, sievenee $\partial_{\nu(\bar{y})} G(\bar{x},\bar{y})$:n yhtälö seuraavasti:

$$\partial_{\nu(\bar{y})} G(\bar{x},\bar{y}) = \frac{r^2}{r^2}\frac{r^2 - \bar{y}\cdot\bar{x}}{1 - 2\cos(\bar{x},\bar{y}) + r^2} - \frac{1-\bar{y}\cdot\bar{x}}{r^2 - 2\cos(\bar{x},\bar{y}) + 1}$$

$$= \frac{r^2 - 1}{r^2 - 2\cos(\bar{x},\bar{y}) + 1},$$

mikä on samaa muotoa kuin Poisson'n ytimen kaava tapauksessa $\rho = 1$.

4.-5.Olkoon $u = u(\bar{x})$, $x \in \Omega$ harmoninen funktio rajoitetussa tasoalueessa Ω sekä $u \in C(\Omega)$. Osoita, että jos $x \in \Omega$, niin

$$|\nabla u(\bar{x})| \le \frac{C}{d},$$

missä d on $\bar{x}$:n etäisyys Ω:n reunasta $\partial\Omega$ ja $C > 0$ on jokin $\bar{x}$:stä riippumaton vakio. Neuvo. Osoita, että pätee

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{\pi\rho^2}\int_{B(\bar{x},\rho)} u(\bar{y})d\bar{y}$$

sopivilla $\rho > 0$ ja sovella tätä kaavaa u:n osittaisderivaattoihin, jotka ovat harmonisia funktioita.

Ratkaisu
Tiedetään, että

$$u(\bar{x}) = \frac{1}{2\pi r}\int_{S(\bar{x},r)} u(\bar{y})d\sigma \quad\Leftrightarrow\quad 2\pi u(\bar{x}) = \int_{S(\bar{x},r)} u(\bar{y})d\sigma.$$

Tästä seuraa, että

$$\Big(\int_0^\rho 2\pi r dr\Big)u(\bar{x}) = \int_{B(\bar{x},r)} u(\bar{y})d\bar{y} \quad\Leftrightarrow\quad \pi\rho^2 u(\bar{x}) = \int_{B(\bar{x},r)} u(\bar{y})d\bar{y}$$

$$\Leftrightarrow\quad u(\bar{x}) = \frac{1}{\pi r^2}\int_{B(\bar{x},r)} u(\bar{y})d\bar{y}.$$

Oletetaan, että $\mathrm{dist}(\bar{x},\partial\Omega) = \inf_{y\in\partial\Omega}|\bar{x}-\bar{y}| = \rho$ ja käytetään Greenin 1. kaavaa

$$\int_\Omega (u\Delta v + \nabla u\cdot\nabla v)d\bar{y} = \int_{\partial\Omega} u\partial_{\nu(\bar{y})}v d\sigma$$

s.e. $\Omega = B(\bar{x},\rho)$, $u = u$ ja $v = y_i$ ($i = 1$ tai $i = 2$). Tällöin

$$\int_{B(\bar{x},\rho)} (u\Delta y_i + \nabla u\cdot\nabla y_i)d\bar{y} = \int_{S(\bar{x},\rho)} u\partial_{\nu(\bar{y})}y_i d\sigma,$$

Nyt $\Delta y_i = 0$ ja $\nabla y_i = (1,0)$, kun $i = 1$ tai $= (0,1)$, kun $i = 2$ ja näin ollen saamme, että

$$\int_{B(\bar{x},\rho)} \frac{\partial u}{\partial y_i}d\bar{y} = \int_{S(\bar{x},\rho)} u\partial_{\nu(\bar{y})}y_i d\sigma$$

$$\Rightarrow\quad \left|\int_{B(\bar{x},\rho)} \frac{\partial u}{\partial y_i}d\bar{y}\right| \le \int_{S(\bar{x},\rho)} |u||\partial_{\nu(\bar{y})}y_i|d\sigma \le ||u||_\infty \int_{S(\bar{x},\rho)} 1 d\sigma$$

$$\Rightarrow\quad \left|\pi\rho^2\frac{\partial u}{\partial y_i}\right| \le ||u||_\infty 2\pi\rho \quad\Leftrightarrow\quad \left|\frac{\partial u}{\partial y_i}\right| \le \frac{2||u||_\infty}{\rho},$$

missä $||u||_\infty := \sup_{x\in\Omega}|u(\bar{x})|$. Tästä seuraa haluttu arvio, sillä nyt

$$|\nabla u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\right)^2} \le \frac{\sqrt{2}||u||_\infty}{\rho},$$

missä siis $\rho := d$ on $\bar{x}$:n etäisyys Ω:n reunasta $\partial\Omega$ ja $\sqrt{2}||u||_\infty := C$ on $\bar{x}$:stä riippumaton vakio.