ODY KEVÄT 2012
Harjoitus 8

Ratkaisuja
(Jussi Martin)

1. Osoita käyttäen määritelmää, että kiinteällä $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$ funktio $\log(1/|\bar{x}-\bar{y}|)$ on reaalianalyyttinen $\bar{x} \in \mathbb{R}^2$:n funktio alueessa, jossa $\bar{x} \neq \bar{y}$.

Ratkaisu:

Luentomonisteen perusteella riittää osoittaa, että yhden muuttujan funktiot $f_i(x_i - y_i) = \log(1/|\bar{x}-\bar{y}|)$, $i=1,2$ ovat reaalianalyyttisiä kaikilla sallituilla ($\bar{x} \neq \bar{y}$) $\bar{x}$:n arvoilla.

Lisäksi, koska

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_i - x_i')^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x_i - y_i - (x_i' - y_i))^k$$

nähdään, että riittää tarkastella tapausta, jossa $\bar{y} = 0$.

Geometrisen sarjan summakaavan perusteella

$$\sum_{k=0}^{\infty} t^k = \frac{1}{1-t}, \quad \text{kun} \quad |t| < 1$$

$\rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^s \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k \right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^s t^k \, dt = \ln|1+s|$$

kun $|s| < 1$;

koska sarja suppenee itseisesti ja tasaisesti kun $|t| < 1$.

Erityisesti pisteen $s = 1$ ympäristössä $]0, 2[$ saadaan muuttujan vaihdolla $s \mapsto s-1$ potenssisarja

$$\ln(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s-1)^{k+1}}{k+1}.$$

Logaritmin laskusääntöjä

$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$

käyttämällä nähdään, että

$$\ln(1/|\bar{x}|) = \ln\left((x_1^2 + x_2^2)^{-1/2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2).$$

Mistä nähdään edelleen, että

Jos $x_2 = 0$, niin pisteen $x_0 \neq 0$ ympäristössä $x \in (0, 2x_0)$

$$\ln(1/|\bar{x}|) = -\frac{1}{2}\ln(x_1^2)$$

$$= -\frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \ln(x_1) = \ln\left(x_0 \cdot \frac{x_1}{x_0}\right)$$

$$= \ln(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x_1}{x_0} - 1\right)^{k+1}}{k+1}$$

$$= \ln(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_0^{-(k+1)}(x_1 - x_0)^{k+1}}{k+1}$$

Jos taas $x_2 \neq 0$, niin

Joudutaan käyttämään tietoa siitä, että yhdistetty funktio $g(h(x))$ on reaalianalyyttinen pisteessä x_0, kun funktio h on reaalianalyyttinen x_0:issa ja g reaalianalyyttinen $h(x_0)$:ssa. Funktio $h(x_1) := x_1^2 + x_2^2$ on luonnollisesti reaalianalyyttinen kaikissa pisteissä $x_0 \in \mathbb{R}$, arvosta x_2 riippumatta.

2. Olkoon $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ rajoitettu yhdesti yhtenäinen alue, $\partial\Omega \in C^2$, Oletetaan, että on annettu funktio $q \in C^1(\bar{\Omega})$, jolle $q(\bar{x}) < 0$ kaikilla $\bar{x} \in \bar{\Omega}$.

Tarkastellaan Neumannin probleemaa

$$\Delta u(\bar{x}) + q(\bar{x}) u(\bar{x}) = 0, \quad \text{kun } \bar{x} \in \Omega,$$
$$\partial_\nu u = f, \quad \text{joukossa } \partial\Omega.$$

olettaen, että tällä on olemassa ratkaisu $u \in C^2(\bar{\Omega})$, osoita, että ratkaisu on yksikäsitteinen (Green.)

Ratkaisu:

Oletetaan, että annetulla ongelmalla on kaksi ratkaisua u_1 ja u_2, tällöin funktio $v := u_1 - u_2$ toteuttaa yhtälöt

$$(1) \quad \Delta v(\bar{x}) + q(\bar{x}) v(\bar{x}) = 0, \quad \text{kun } \bar{x} \in \Omega,$$
$$(2) \quad \partial_\nu v = 0, \quad \text{joukossa } \partial\Omega.$$

käyttämällä Greenin 1. kaavan

Saadaan yhtälö

$$\int_{\Omega} \left(v \Delta v + |\nabla v|^2 \right) d\bar{x} = \int_{\partial\Omega} v \partial_\nu v \, d\sigma$$

ja käyttämällä yhtälöitä (1) ja (2) saadaan tästä edelleen yhtälö

$$(3) \quad \int_{\Omega} \left(-q v^2 + |\nabla v|^2 \right) dx = 0.$$

Koska $-q(\bar{x}) v(\bar{x}) \geq 0$, $|\nabla v(\bar{x})|^2 \geq 0$ kaikilla $x \in \Omega$; yhtälö (3) voi olla tosi jos ja vain jos $v(x) = 0$ kaikilla $\bar{x} \in \Omega$. Toisin sanoen $u_1(\bar{x}) = u_2(\bar{x})$ kaikilla $\bar{x} \in \Omega$ eli ratkaisu on yksikäsitteinen.

3. Olkoon $K(r,\theta) := \dfrac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi) + r^2}$

ja $h(r,\theta) := \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \dfrac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 - 2\rho r\cos(\theta-\varphi) + r^2}\,d\varphi$

Nyt $|K(r,\theta)| \leq \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{r}{\rho}\right|^{|n|} = 1 + 2\frac{1}{1-\left|\frac{r}{\rho}\right|}$

sillä $K(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)}$,

Näin ollen sarja suppenee itseisesti ja tasaisesti (kuten myös derivoitu sarja) kaikissa kuulissa $B(0,R)$, $0<R<\rho$,

Joten $\Delta K(r,\theta) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\frac{r}{\rho}\right)^{|n|} e^{in(\theta-\varphi)}$

$\equiv 0$, koska

$\Delta |r|^n e^{in\theta} \equiv 0$, (moniste s. 45).

Tästä seuraa, että h on harmoninen, sillä K on tasaisesti jatkuva jokaisessa kuulassa $B(0,R)$ $(R<\rho)$, joten $\Delta h = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \Delta K\, d\varphi \equiv 0$

mikä pätee joukossa $B(0,R)$ $\forall\, R<\rho$.

→

ja näin ollen myös koko joukossa $\Omega = B(0,\rho)$.

Nyt lisäksi: nähdään, että h ei riipu θ:sta eli $h(r,\theta) = h(r)$, joten

$$\Delta h = h_{rr} + \frac{1}{r} h_r + \underbrace{\frac{1}{r^2} h_{\theta\theta}}_{=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad r h_{rr} = -h_r$$

$$\Leftrightarrow \int_0^s r h_{rr}\, dr = -\int_0^s h_r$$

os.int.

$$\Leftrightarrow \int_0^s h_r\, dr + \Big/_0^s r h_r = h(s) - h(0)$$

$$\Leftrightarrow \cancel{h(s) - h(0)} + s h_r(s) = \cancel{h(s) - h(0)}$$

$$\Leftrightarrow s h_r(s) = 0,$$

mikä pätee kaikilla s,

joten $h_r \equiv 0 \Rightarrow h$ on vakio.

Selvästi: $h(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\rho^2}{\rho^2}\, d\varphi = 1$.

Eli $h(r,\theta) \equiv 1$.

6/7

4. Tarkastellaan ns. Poissonin kaavaa ylemmässä puolitasossa, ja sen määrittelemää funktiota

$$u(x,y) := \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}d\xi,$$

missä $x \in \mathbf{R}$, $y > 0$.
olettaen, että f on joukossa $\mathbf{R}$ jatkuva lukuunottamatta äärellistä määrää epäjatkuvuuspisteitä ja että $|f(x)| \le (1+|x|)^{-3}$ kaikilla x, osoita, että u on harmoninen ylemmässä puolitasossa.

Ratkaisu:

Perustellaan ensin sitä, että kaikki 1. ja 2. kertaluvun derivoinnit voidaan siirtää integraalin sisälle.

Olkoot $a_1,\dots,a_n$ pisteet joissa f on epäjatkuva ja M_ε luku joka kiinnitetään myöhemmin s.e. $-M_\varepsilon < a_1$ ja $a_n < M_\varepsilon$. Merkitään $a_0 := -M_\varepsilon$ ja $a_{n+1} := M_\varepsilon$. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ löytyy $\delta_\varepsilon > 0$ s.e.

$$\sum_{k=0}^{n}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\right)-\left(\frac{\frac{f(\xi)}{(\xi-x-h)^2+y^2}-\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}}{h}\right)\right]d\xi < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun $|h| < \delta_\varepsilon$ (vertaa harjoituksen 3. mallit). Lisäksi

$$\int_{]-\infty,a_0]\cup[a_{n+1},\infty[}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\right)-\left(\frac{\frac{f(\xi)}{(\xi-x-h)^2+y^2}-\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}}{h}\right)\right]d\xi < \frac{\varepsilon}{2},$$

kun luku M_ε valitaan riittävän suureksi, tämä on totta, koska

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}\right)-\left(\frac{\frac{f(\xi)}{(\xi-x-h)^2+y^2}-\frac{f(\xi)}{(\xi-x)^2+y^2}}{h}\right)\right| \le |P_2(\xi,x,y)f(\xi)|,$$

missä $P_2(\xi,x,y)$ on jokin enintään toista astetta oleva ξ:n polynomi kaikilla x, y, $(y > 0)$ (tämän voi nähdä kun teemme nämä laskut myöhemmin) ja f:llehän päti epäyhtälö $|f(\xi)| \le (1+|\xi|)^{-3}$. Samalla lailla saadaan perusteltua muiden osittaisderivointien vieminen integraalin sisälle.

Nyt voimme laskea Δu:n.

$$u_x = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)\frac{2(x-\xi)f(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^2}d\xi \quad\Longrightarrow$$

$$u_{xx} = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)\frac{2f(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^2}d\xi + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)(-2)\frac{4(x-\xi)^2f(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^3}d\xi,$$

$$u_y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^2}d\xi + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)\frac{2yf(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^2}d\xi \quad\Longrightarrow$$

$$u_{yy} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)\frac{2yf(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^2}d\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)\frac{2yf(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^2}d\xi$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)\frac{2f(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^2}d\xi + \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)(-2)\frac{4y^2f(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^3}d\xi.$$

Ryhmittelemällä termejä uudelleen, saamme että

$$u_{xx}+u_{yy} = -\frac{8y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^2}d\xi + \frac{8y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left((x-\xi)^2+y^2\right)f(\xi)}{\left((\xi-x)^2+y^2\right)^3}d\xi \equiv 0$$

eli u on harmoninen ylemmässä puolitasossa.

5. Tarkastellaan tapausta, että f on jonkin suljetun välin $[a,b] \subset \mathbf{R}$ karakteristinen funktio: $f(x) = 1$ jos $x \in [a,b]$, ja $f(x) = 0$ muulloin.
osoita, että tällöin

$$\lim_{y \to 0} u(x,y) = f(x)$$

lukuunottamatta mahdollisesti välin $[a,b]$ päätepisteitä.

Ratkaisu:

Nyt

$$u(x,y) := \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi - x)^2 + y^2} d\xi = \frac{y}{\pi} \int_a^b \frac{d\xi}{(\xi - x)^2 + y^2}$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_a^b \frac{1}{y^2} \frac{d\xi}{((\frac{\xi - x}{y})^2 + 1)} = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{\frac{1}{y} d\xi}{((\frac{\xi - x}{y})^2 + 1)} = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{ds}{1 + s^2},$$

missä on tehty muuttujan vaihto $s = \frac{\xi - x}{y}$.

Tällöin, jos $x \in]a,b[$ on $\frac{a-x}{y} < 0$ ja $\frac{b-x}{y} > 0$

$$\Longrightarrow \lim_{y \to 0} u(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{ds}{1+s^2} = \lim_{y \to 0} \overset{\frac{b-x}{y}}{\underset{\frac{a-x}{y}}{\Big/}} \arctan s = \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\Big/}} \arctan s = 1,$$

jos $x \notin [a,b]$ on joko $x < a$ jolloin $\frac{a-x}{y} > 0$, $\frac{b-x}{y} > 0$ ja

$$\lim_{y \to 0} u(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{ds}{1+s^2} = \lim_{y \to 0} \overset{\frac{b-x}{y}}{\underset{\frac{a-x}{y}}{\Big/}} \arctan s = \overset{\infty}{\underset{\infty}{\Big/}} \arctan s = 0$$

tai sitten $x > b$ jolloin $\frac{a-x}{y} < 0$, $\frac{b-x}{y} < 0$ ja

$$\lim_{y \to 0} u(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{ds}{1+s^2} = \lim_{y \to 0} \overset{\frac{b-x}{y}}{\underset{\frac{a-x}{y}}{\Big/}} \arctan s = \overset{-\infty}{\underset{-\infty}{\Big/}} \arctan s = 0,$$

jos taas $x = a$ on $\frac{a-x}{y} = 0$, $\frac{b-x}{y} > 0$ ja

$$\lim_{y \to 0} u(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{ds}{1+s^2} = \lim_{y \to 0} \overset{\frac{b-x}{y}}{\underset{\frac{a-x}{y}}{\Big/}} \arctan s = \overset{\infty}{\underset{0}{\Big/}} \arctan s = \frac{1}{2},$$

vastaavasti jos $x = b$ on $\frac{a-x}{y} < 0$, $\frac{b-x}{y} = 0$ ja

$$\lim_{y \to 0} u(x) = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\pi} \int_{\frac{a-x}{y}}^{\frac{b-x}{y}} \frac{ds}{1+s^2} = \lim_{y \to 0} \overset{\frac{b-x}{y}}{\underset{\frac{a-x}{y}}{\Big/}} \arctan s = \overset{0}{\underset{-\infty}{\Big/}} \arctan s = \frac{1}{2},$$

Eli $\lim_{y \to 0} u(x,y) = f(x)$ paitsi välin $[a,b]$ päätepisteissä.