ODY harj. 6. Malliratkaisut

1. Osoitettava että aaltoyhtälö napakoordinaateissa on:

$$v_{tt} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}.$$

Oletetaan siis, että $u = u(x, y, t)$ on aaltoyhtälön $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ ratkaisu ja merkitään $r\sin\theta = x$, $r\cos\theta = y$ ja $v(r\cos\theta, r\sin\theta, t) := u(r\cos\theta, r\sin\theta, t)$.

Nyt käyttämällä ketjusääntöä saadaan:

$$v_r = \cos\theta\, u_x + \sin\theta\, u_x,$$

$$v_{rr} = \cos^2\theta\, u_{xx} + \cos\theta\sin\theta\, u_{xy} + \sin\theta\cos\theta\, u_{yx} + \sin^2\theta\, u_{yy},$$

$$v_\theta = -r\sin\theta\, u_x + r\cos\theta\, u_y,$$

$$v_{\theta\theta} = (-1)^2\sin\theta\, u_{xx} - r^2\sin\theta\cos\theta\, u_{xy} - r\cos\theta\, u_x + r^2\cos\theta\, u_{yy} - r\sin\theta\, u_y$$

ja triviaalisti:

$$v_{tt} = u_{tt}.$$

$\Rightarrow$

$$v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_r = \cos^2\theta\, u_{xx} + \cancel{\cos\theta\sin\theta\, u_{xy}} + \cancel{\sin\theta\cos\theta\, u_{yx}} + \sin^2\theta\, u_{yy} + \cancel{\frac{\cos\theta}{r} u_x} + \cancel{\frac{\sin\theta}{r} u_y}$$

$$+ \sin^2\theta\, u_{xx} - \cancel{\sin\theta\cos\theta\, u_{xy}} + \cos^2\theta\, u_{yy} - \cancel{\frac{\cos\theta}{r} u_x} - \cancel{\cos\theta\sin\theta\, u_{yx}} - \cancel{\frac{\sin\theta}{r} u_y}$$

$$= \underbrace{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}_{=1} u_{xx} + \underbrace{(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}_{=1} u_{yy} = u_{xx} + u_{yy}$$

$\longrightarrow$

koska edellä oli, että $v_{tt} = u_{tt}$,
on siis yhtälö $v_{tt} = v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\theta\theta}$
ekvivalentti yhtälön $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ kanssa.

I.-3. Johda luentojen kaava (6.52)
eli: tehtävään (f annettu)

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + f(x,y,t), \quad \bar{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2, \ t \geq 0,$$
$$u(\bar{x},0) = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2,$$
$$u_t(\bar{x},0) = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^2,$$

ratkaisukaava

$$u(\bar{x},t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^t \int_{|\bar{\xi}-\bar{x}| \leq t-\tau} \frac{f(\bar{\xi},\tau)\, d\bar{\xi}\, d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2 - |\bar{\xi}-\bar{x}|^2}}$$

Ratkaisu:

Laskujen helpottamiseksi, kannattaa ensin määritellä funktio

$$w(\bar{x},z,t) := \int_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{|\tilde{\xi}-\tilde{x}| = t-\tau} \tilde{f}(\tilde{\xi},\tau)\, d\sigma(\tilde{\xi})\, d\tau$$

missä $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^3$, $\tilde{x} := (\bar{x},z) \in \mathbb{R}^3$

ja $\tilde{f}(\tilde{\xi},\tau) := f(\bar{\xi},\tau)$.

Osoitetaan, että w toteuttaa tehtävän annetun yhtälöt kaikilla $z \in \mathbb{R}$ (w ei riipu z:sta).

Tämän jälkeen osoitamme lopuksi, että $w(\bar{x}, z, t) = u(\bar{x}, t)$ kaikilla $(\bar{x}, z) \in \mathbb{R}^3$, $t \geq 0$.

Määritellään vielä funktio

$$v(\tilde{x}, t, \tau) = \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{|\tilde{\xi}-\tilde{x}| \leq t-\tau} \tilde{f}(\tilde{\xi}, \tau)\, d\sigma(\tilde{\xi})$$

Vertaamalla tätä funktiota luentomonisteen lauseen 6.3. funktioon nähdään, että v toteuttaa yhtälöt

$$v(\tilde{x}, \tau, \tau) \equiv 0, \quad v_t(\tilde{x}, \tau, \tau) = \tilde{f}(\tilde{x}, \tau)$$

ja

$$v_{tt}(\tilde{x}, \tau, \tau) \equiv 0;$$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$. Lisäksi huomataan, että

$$w(\bar{x}, z, t) = \int_0^t v(\tilde{x}, t, \tau)\, d\tau.$$

Käyttämällä kaavaa

$$\partial_t \int_0^t v(\tilde{x}, t, \tau)\, d\tau = v(\tilde{x}, t, t) + \int_0^t \partial_t v(\tilde{x}, t, \tau)\, d\tau$$

nähdään, että $w_t(\bar{x}, z, t) = 0 + \int_0^t v_t(\tilde{x}, t, \tau)\, d\tau$

Derivoimalla vielä kerran t:n suhteen saadaan

$$w_{tt}(\bar{x}, z, t) = v_t(\tilde{x}, t, t) + \int_0^t v_{tt}(\tilde{x}, t, \tau)\,d\tau$$

$$= \tilde{f}(\tilde{x}, t) + \int_0^t \hat{v}_{tt}(\tilde{x}, t, \tau)\,d\tau \,;$$

(edellä olleen yhtälön $v_t(\tilde{x}, \tau, \tau) = \tilde{F}(\tilde{x}, \tau)$ nojalla). Vertaamalla funktiota v lauseen 6.3. funktioon, nähdään myös, että

$$v_{tt}(\tilde{x}, t, \tau) = \Delta v(\tilde{x}, t, \tau)$$

kaikilla $\tau \in \mathbb{R}$. Näin ollen, koska $\tilde{f}(\tilde{x}, t) = f(\bar{x}, t)$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$, nähdään, että kiinnittämällä z:lle jokin vakioarvo saadaan $\bar{x}$:n ja t:n funktio, joka toteuttaa tehtävän annon yhtälöt.

Vielä pitää osoittaa, että $w(\bar{x}, z, t) = u(\bar{x}, t)$ kaikilla $z \in \mathbb{R}$, kiinnitetään jokin z:n arvo z_0 ja parametrisoidaan $t-\tau$ säteisen, $\tilde{x}=(\bar{x}, z_0)$ keskisen pallon ylempi pallonkuori $\bar{\xi}$:n suhteen. Toisin sanoen

$$\xi_3(\xi_1,\xi_2) = \sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}.$$

Tällöin

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_1}\right)^2+\left(\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+\frac{(x_1-\xi_1)^2+(x_2-\xi_2)^2}{(t-\tau)^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}$$

$$= \frac{(t-\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}},$$

koska $t-\tau \geq 0$. Koska $\tilde{f}$ ei riippu z:sta saadaan integraalille yli alemman $\rightarrow$

$\rightarrow$ pallon kuoren sama arvo, siten

$$\int_0^t \frac{1}{4\pi(t-\tau)} \int_{|\tilde{\xi}-\tilde{x}|=t-\tau} \tilde{f}(\tilde{\xi},\tau)\, d\sigma(\tilde{\xi})\, d\tau$$

$$= \int_0^t \left(\frac{1}{\cancel{4\pi(t-\tau)}} \int_{|\bar{\xi}-\bar{x}|\le t-\tau} \frac{\cancel{2(t-\tau)}\, \tilde{f}(\tilde{\xi},\tau)\, d\bar{\xi}\, d\tau}{\sqrt{(t-\tau)^2-|\bar{\xi}-\bar{x}|^2}} \right)$$

$$= \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{|\bar{\xi}-x|\le t-\tau} \frac{f(\bar{\xi},\tau)\, d\bar{\xi}}{\sqrt{(t-\tau)^2-|\bar{\xi}-x|^2}},$$

missä käytettiin tietoa

$$\tilde{f}(\bar{x},z,t) = f(\bar{x},t) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

4.5. Ratkaistava formaalisti Fourier-sarja-menetelmällä alkuarvo-reuna-arvotehtävä

$$u_{tt} - u_{xx} + u = 0, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0,$$

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t), \quad t > 0$$

$$u(x,0) = 0, \quad 0 \le x \le \pi,$$

$$u_t(x,0) = 1 + \cos^3 x, \quad 0 \le x \le \pi.$$

Johdetaan sarjakehitelmä yritteen $X(x)T(t) = u(x,t)$ avulla

$$\Rightarrow \quad X(x)T''(t) - X''(x)T(t) = -X(x)T(t)$$

olet. $X(x) \neq 0, T(t) \neq 0$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = -1$$

$$\Rightarrow \quad X''(x) = -\lambda X(x)$$

$$\wedge \quad T''(t) = -(\lambda + 1) T(t).$$

joilla on ratkaisut kun $\lambda \ge 0$.

$\longrightarrow$

$X(x) = a\cos\sqrt{\lambda}x + b\sin\sqrt{\lambda}x$ $\mathbb{R}$

$T(t) = \alpha\cos\sqrt{\lambda+1}\,t + \beta\sin\sqrt{\lambda+1}\,t$

~~koska~~ halutaan, että $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$

$\forall t > 0$, tulee olla $\sqrt{\lambda} = n$ ja $b_n = 0$

kun $n = 2m$, $n \in \mathbb{N}$, sillä $X'(x) = -\sqrt{\lambda}\,a\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\,b\cos\sqrt{\lambda}x$

$= -na\sin(nx) + nb\cos(nx)$

ja siten $X'(0) = X'(\pi)$

vain jos $a_n = 0$, kun $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$

Saadaan siis sarjakehitelmä:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\sin(nx) + b_n\cos(nx)\right)\left(\alpha_n\cos\left((n+1)t\right) + \beta_n\sin\left(\sqrt{n^2+1}\,t\right)\right).$$

missä $a_n = 0$, kun n parillinen

Nyt ehdosta $u(x,0) = 0$, $0 \le x \le \pi$,

seuraa että $\alpha_n\cos(0) + \beta_n\sin(0) = 0$, $\forall n$.

Mikä on mahdollista vain jos $\alpha_n = 0$, $\forall n$.

Ja sarja onkin siis muotoa:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\sin(nx) + b_n\cos(nx)\right)\left(\beta_n\sin\left(\sqrt{n^2+1}\,t\right)\right).$$

($a_n = 0$, kun n parillinen)

Nyt ehdosta $u_t(x,0) = 1 + \cos^3 x$

$= 1 + \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$, $0 \le x \le \pi$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n\sin(nx) + b_n\cos(nx)\right)\cdot\sqrt{n^2+1}\,\beta_n\underbrace{\cos\left(\sqrt{n^2+1}\cdot 0\right)}_{=1}$$

$$= 1 + \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$$

$$= \overset{0}{a_0}\beta_0\sqrt{1}\underbrace{\cos\left(\sqrt{1}\cdot 0\right)}_{=1} + \overset{\neq 0}{\sqrt{1^2+1}\,a_1\cos x\,\beta_1}\underbrace{\cos\left(\sqrt{1+1}\cdot 0\right)}_{=1} + \sqrt{3^2+1}\,a_3\cos 3x\cos\left(\sqrt{3^2+1}\cdot 0\right) \longrightarrow$$

SIV 6/6

$\Rightarrow$ $\alpha_0 \cdot \beta_0 \sqrt{1} = 1$, $\alpha_1 \cdot \beta_1 \sqrt{1+1} = \frac{3}{4}$

ja $\alpha_3 \cdot \beta_3 \sqrt{3^2+1} = \frac{1}{4}$.

Nyt $\alpha_n \beta_n$:t voidaan ratkaista

ja valita yhteiseksi kertoimeksi

termille $\cos nx \sin \sqrt{n^2+1}\, t$

$$\Rightarrow \quad \alpha_0 \beta_0 = 1, \quad \alpha_1 \beta_1 = \frac{3}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

$$\text{ja} \quad \alpha_3 \beta_3 = \frac{1}{4\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{40}$$

(~~sekä~~ muulloin $\alpha_n \beta_n = 0$).

eli $u(x,y) = \sin t + \frac{3\sqrt{2}}{8} \cos x \sin \sqrt{2}\, t + \frac{\sqrt{10}}{40} \cos 3x \sin \sqrt{10}\, t$