ODY Harj. 5 (Kevät 2012) Juss: Martin

Ratkaisuja

1. Ratkaise Fourier-sarjamenetelmällä dalto yhtälön probleema välillä $I := [0,1] \subset \mathbb{R}$.

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad x \in I, \quad t > 0,$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0,$$
$$(*) \quad u(x,0) = \sin(3\pi x), \quad x \in I,$$
$$(**) \quad u_t(x,0) = 0, \quad x \in I.$$

Ratkaisu:

yhtälön ratkaisun on siis oltava muotoa

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\, T_n(t),$$

missä $T_n(t) = a_n \cos(n\pi t) + b_n \sin(n\pi t)$.

Ehdosta $(**)$ nähdään, että $b_n = 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Näin ollen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\, a_n \cos(n\pi t)$$

$\longrightarrow$

Jn ehdosta (*) seuraa, että

$$u(x,t) = \sin(3\pi x)\cos(3\pi t).$$

Laskemaan energiafunktionaalin

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L (u_t)^2 + (u_x)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (-3\pi)^2 \sin^2(3\pi x)\sin^2(3\pi t) + (3\pi)^2\cos^2(4\pi x)\cos^2(3\pi t)\,dx$$

$$= \frac{9\pi^2}{2}\left[\sin^2(3\pi t)\int_0^1 \sin^2(3\pi x)\,dx + \cos^2(3\pi t)\int_0^1 \cos^2(3\pi x)\,dx\right]$$

$$= \frac{9\pi^2}{2}\left[\sin^2(3\pi t)\,C + \cos^2(3\pi t)\,C\right]$$

$$= 9\pi^2 C = 4\pi^2, \quad \text{sillä}$$

$$C = \int_0^1 \sin^2(3\pi x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(1 - \cos(6\pi x)\right)dx$$

$$= 1/2 = \int_0^1 \frac{1}{2}\left(1 + \cos(6\pi x)\right)dx$$

$$= \int_0^1 \cos^2(3\pi x)\,dx.$$

2. Merkitään $\bar{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ja $u = u(\bar{x},t) = u(x,y,z,t)$. Tarkastellaan seuraavaa alkuarvotehtävää Cauchy probleemaa $\mathbb{R}^3$:ssa.

$$u_{tt} = \Delta u, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3, \ t > 0,$$
$$u(\bar{x},0) = 0, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3,$$
$$u_t(\bar{x},0) = \phi(\bar{x}), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^3.$$

Laske ratkaisukaavasta funktion u arvo pisteessä $\bar{x} = 0$ ajanhetkellä t, kun $\phi(\bar{x}) = 4 - |\bar{x}|^2$, jos $|\bar{x}| \le 2$, ja $\phi(\bar{x}) = 0$, jos $|\bar{x}| > 2$ (itse asiassa = vektorinpituus).

Ratkaisu:

Poissonin kaava:

$$u(\bar{x},t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{t} \int_{|\bar{\xi}-\bar{x}|=t} \phi_0(\bar{\xi}) \, d\sigma \right)$$
$$+ \frac{1}{4\pi t} \int_{|\bar{\xi}-\bar{x}|=t} \phi_1(\bar{\xi}) \, d\sigma,$$

missä nyt $\phi_0(\bar{\xi}) \equiv 0$ ja

→

$\phi_1(\bar{\xi}) = \phi(\bar{\xi})$ on määritelty tehtävän annossa, Saadaan siis:

$$u(\bar{x},t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\bar{\xi}-x|=t} \phi(\xi)\, d\sigma$$

$$= \frac{1}{4\pi t} \int_{|\bar{\xi}-x|=t} (4-|\bar{\xi}|^2)\, \chi_{B(\bar{0},2)}\, d\sigma,$$

missä $\chi_{B(\bar{0},2)}$ on 2-säteisen pallon karakteristinen funktio.

Tästä nähdään, että

$$u(0,t) = \frac{1}{4\pi t} \int_{|\bar{\xi}|=t} (4-|\bar{\xi}|^2)\, \chi_{B(\bar{0},2)}\, d\sigma$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{4\pi t}\left(4-t^2 \int_{|\bar{\xi}|=t} d\sigma\right) = 4-t^2, & t \le 2 \\ \frac{1}{4\pi t} \int_{|\bar{\xi}|=t} 0 \cdot d\sigma = 0, & t > 2; \end{cases}$$

koska $\int_{|\bar{\xi}|=t} d\sigma = 4\pi t^2$ (t-säteisen pallon pinta-ala (MAOL))

$\longrightarrow$

3. Oletetaan, että funktio $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva (vähempikin riittäisi), Johda derivaatan määritelmästä derivointikaava:

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(t,s)\,ds = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds$$

Ratkaisu:

todistetaan kaava, tehtävää 4. silmällä pitäen, yleisemmässä muodossa:

$$\frac{d}{dt}\int_0^{g(t)} f(t,s)\,ds = g'(t)f(t,g(t)) + \int_0^t \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds.$$

Olkoon

$$h(x,y) = \int_0^x f(y,s)\,ds$$

$\longrightarrow$

Tällöin $\frac{d}{dt}\int_0^{g(t)} f(t,s)\,ds$

$$= \frac{d}{dt} h(g(t),t) = g'(t)\frac{\partial h(g(t),t)}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial h(g(t),t)}{\partial y} = g'(t) f(t, g(t))$$

$$+ \int_0^{g(t)} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds$$

Sillä $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(y,x) - F(y,0)\right]$

$= f(y,x)$, kun $F(y,x) = \int_0^x f(y,s)\,ds$

Jos osittaisderivointi y:n suhteen puolestaan voidaan siirtää integraalin sisälle rajoittumalla sopivaan kompaktiin jouktoon (vertaa harjoituksen 3. ratkaisuihin).

$$\Rightarrow u(0,t) = \begin{cases} 4-t^2, & \text{kun } t \le 2 \\ 0, & \text{kun } t > 2. \end{cases}$$

3. Oletetaan, että funktio $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ on kaksi kertaa jatkuvasti derivoituva (vähemmälläkin riittäisi). Johda derivaatan määritelmästä derivointikaava.

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f(t,s)\,ds = f(t,t) + \int_0^t \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds$$

Ratkaisu:

Todistetaan kaava, tehtävän 4. silmukan pitäen, yleisemmässä muodossa:

$$\frac{d}{dt} \int_0^{g(t)} f(t,s)\,ds = g'(t)\, f(t,g(t)) + \int_0^t \frac{\partial F(t,s)}{\partial t}\,ds.$$

Olkoon $h(x,y) := \int_0^x F(y,s)\,ds$

→

Tällöin $\frac{d}{dt}\int_0^{g(t)} f(t,s)\,ds$

$$= \frac{d}{dt} h(g(t),t) = g'(t)\frac{\partial h(g(t),t)}{\partial x} + \frac{\partial h(g(t),t)}{\partial y}$$

$$= g'(t) f(t,g(t)) + \int_0^{g(t)} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds,$$

sillä $\frac{\partial h(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(F(y,x) - F(y,0)\right)$

$= f(y,x)$, kun $F(y,x) = \int_0^x f(y,s)\,ds$

ja osittais derivointi y:n suuhteen puolestaan voidaan siirtää integraalin sisälle rajoittumalla sopivaan kompaktiin joukkoon.

4. Miten derivoit:

$$\frac{d}{dt}\int_{-t}^{0} f(t,s)\,ds$$

Ja

$$\frac{d}{dt}\int_{t}^{3t+t^3} f(t,s)\,ds$$

Ratkaisu:

sovelletaan edellisen tehtävän ratkaisussa johdettua kaavaa.

Nyt $\int_{t}^{0} f(t,s)\,ds = -\int_{0}^{-t} f(t,s)\,ds$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{t}^{0} f(t,s)\,ds = f(t,-t) - \int_{0}^{-t} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds$$

Ja

$$\int_{t}^{3t+t^3} f(t,s)\,ds = -\int_{0}^{t} f(t,s)\,ds + \int_{0}^{3t+t^3} f(t,s)\,ds \quad \Leftarrow$$

$$\frac{d}{dt}\int_{t}^{3t+t^3} f(t,s)\,ds =$$

$$= f(t,t) - \int_0^t \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds + (3+3t^2) f(t, 3t+t^3) + \int_0^{3t+t^3} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds$$

$$= (3+3t^2) f(t, 3t+t^3) - f(t,t) + \int_t^{3t+t^3} \frac{\partial f(t,s)}{\partial t}\,ds$$

5. Olkoon $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ riittävän sileä funktio, osoita, että

$$\frac{d}{dt} \int_{|\xi| \le t} f(\xi)\,d\xi = \int_{|\xi|=t} f(\xi)\,d\sigma(\xi),$$

missä integrointeihin liittyvät merkinnät ovat kuten luentojen kohdissa (6.34)–(6.35).

Ratkaisu:

Nyt $$\int_{|\xi| \le t} f(\xi)\,d\xi = \int_0^t \left(\int_{|\xi|=\tau} f(\xi)\,d\sigma(\xi) \right) d\tau,$$

joten

$$\frac{d}{dt} \int_{|\xi| \le t} f(\xi)\,d\xi = \frac{d}{dt} \int_0^t \left(\int_{|\xi|=\tau} f(\xi)\,d\sigma(\xi) \right) d\tau$$

$$= \int_{|\xi|=t} f(\xi)\,d\sigma(\xi),$$