ODY harjoitus 4. Malliratkaisut sivu 1/

1.

$$u u_x + u_y = 0, \quad u(x,0) = h(x)$$

$$h(x) = \begin{cases} a, & \text{kun } x \le 0 \\ a(1-x), & \text{kun } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{kun } x \ge 1 \end{cases}$$

Karakteristiset yhtälöt:

$$\frac{dx}{dt} = z, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 0$$

Alkuehdot:

$$x(s,0) = s, \quad y(s,0) = 0, \quad z(s,0) = h(s)$$

Nyt

$$y(s,t) = t + C_2(s) = t \quad \text{(alkuehto)}$$

$$z(s,t) = C_3(s) = h(s) \quad \text{(alkuehto)}$$

$$x(s,t) = C_3(s)t + C_1(s) \quad \text{(alkuehto)}$$

$$= h(s)t + s$$

$$\Rightarrow \quad x(s,t) = \begin{cases} at + s, & \text{kun } s \le 0 \\ a(1-s)t + s, & \text{kun } 0 < s < 1 \\ s, & \text{kun } s \ge 1. \end{cases}$$

Nyt halutaan ratkaista s x:n ja y:n funktiona, jotta $z(s,t) = h(s) = u(x,y)$ saataisiin ratkaistua (Huom. $t = y$)

$$\Rightarrow \quad s(x,y) = \begin{cases} x - ay, & \text{kun } s \le 0 \\ \frac{x-ay}{(1-ay)}, & \text{kun } 0 < s < 1, \ y < \frac{1}{a} \\ x, & \text{kun } s \ge 1. \end{cases}$$

⟶

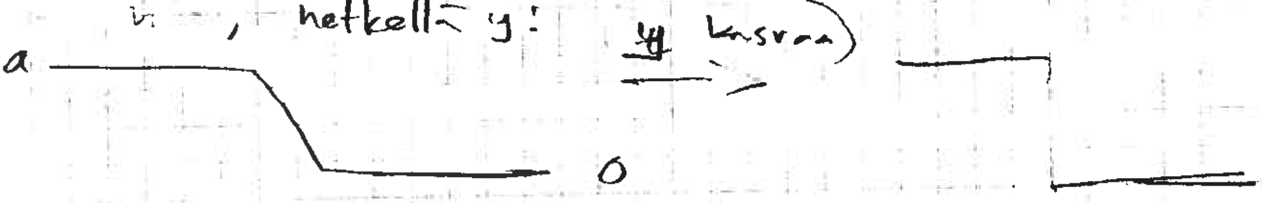
ja näin saadaan

$$u(x,y) = h(s) = \begin{cases} h(x-ay), & \text{kun } s \le 0 \\ h\left(\frac{x-ay}{1-ay}\right), & \text{kun } 0 < s < 1 \quad y < \frac{1}{a} \\ h(x), & \text{kun } s \ge 1. \end{cases}$$

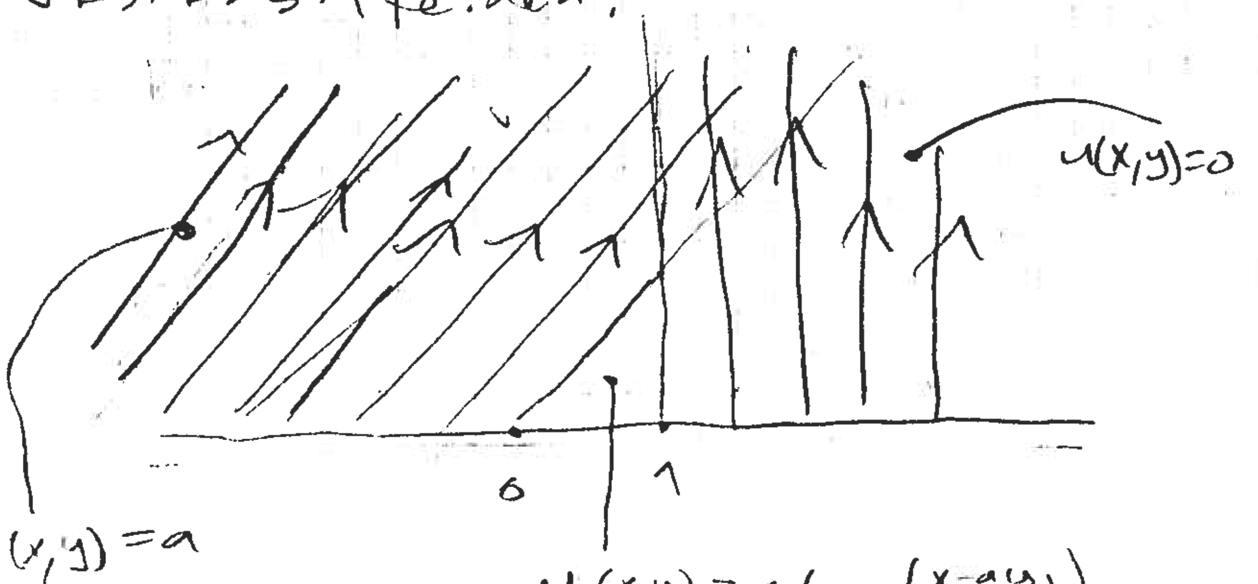
h:n määritelmä

$$\Rightarrow \quad h(s) = \begin{cases} a, & \text{kun } s \le 0 \\ a\left(1 - \left(\frac{x-ay}{1-ay}\right)\right), & \text{kun } 0 < s < 1, \; y < \frac{1}{a} \\ 0, & \text{kun } s \ge 1. \end{cases}$$

Tästä nähdään, että hilla tapahtuu shokki ~~ajan~~ hetkellä $y = \frac{1}{a}$,



Tästä hetkestä lähtien $u(x,y)$ ei ole yksikäsitteinen.



"vinoviivaisten" integraalikäyrien alueessa u saa siis arvon a. "Pystysuorien" integraalikäyri →

alueessa arvon $u \equiv 0$. Nämä alueet menevät päällekkäin. Näiden alueiden välissä u saa arvon $u(x,y) = a\left(1 - \left(\frac{x-ay}{1-ay}\right)\right)$ (ja tämä vain kun $y < 1/a$)

Ratkaisun u ei siis saada jatkuvaksi ajan hetkestä $y = \frac{1}{a}$ eteenpäin. Voimme kuitenkin löytää heikon ratkaisun, joka siis toteuttaa yhtälöä vastaavan integraaliyhtälön

$$(1) \quad \frac{1}{2}(u(b,y))^2 - \frac{1}{2}(u(a,y))^2 + \frac{d}{dy}\int_a^b u(x,y)\,dy = 0,$$

missä $a \leq b$, ja $(a,y), (b,y) \in \mathbb{R}^2$.

(Tällöinhän puolittain derivoimalla saadaan alkuperäinen yhtälö

$$uu_y + u_x = 0.)$$

Kokeillaan heikoksi ratkaisuksi ajan hetken $y \geq \frac{1}{a}$ jälkeen seuraavaa funktiota

$$u(x,y) = \begin{cases} a, & \text{kun } x < \frac{ay+1}{2} \\ 0, & \text{kun } x \geq \frac{ay+1}{2} \end{cases}$$

(ennen ajan hetkeä $y = \frac{1}{a}$ ratkaisu on siis sama jatkuva ratkaisu kuten aiemminkin.)

→

Jos $ay +$ $x_1 < \frac{ay+1}{2}$ ja $x_2 > \frac{ay+1}{2}$ on

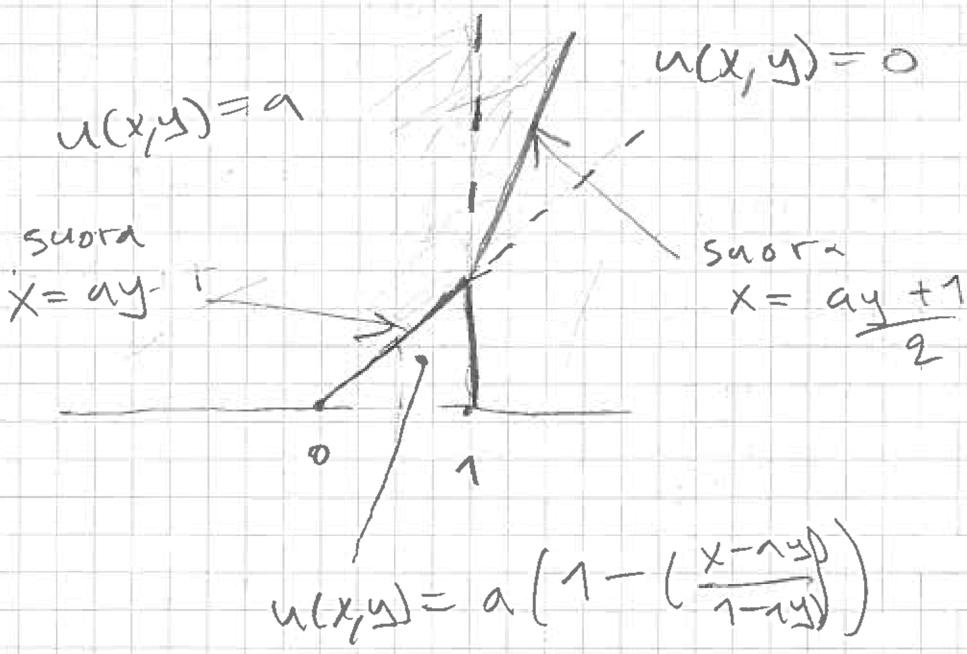
$$\frac{1}{2}\left(u(x_2,y)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(u(x_1,y)\right) + \frac{d}{dy}\int_{x_1}^{x_2} u(x,y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2}a^2 + \frac{d}{dy}\left(a\left(x_2 - \frac{ay+1}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a^2 = 0.$$

Tämä on siis yhtälön heikkoratkaisu

kuva



Selvennys: $u(x,y) \equiv a$ alueessa joka jää suorien $x=ay$ ja $x=\frac{ay+1}{2}$ vasemmalle puolelle.

$u(x,y) \equiv 0$ alueessa joka jää suorien $x=1$ ja $x=\frac{ay+1}{2}$ oikealle puolelle.

ja $u(x,y) = a\left(1-\left(\frac{x-ay}{1-ay}\right)\right)$ alueessa joka jää suorien $x=ay$ ja $x=1$ väliin →

→ sekä tämän alueen reunalla, kunhan $y < \frac{1}{a}$.

Huom. suoralla $y = \frac{ay+1}{2}$

u:n voi määritellä itseasiassa miten tahansa, koska kyseessä on heikkoratkaisu, sillä heikko ratkaisu toteuttaa integraaliyhtälön ja funktion arvot suoralla eivät vaikuta integraalin arvoihin (suora on tason $\mathbb{R}^2$ nollamittainen joukko).

2. yhtälön

$$u_{xx} + u_{yy} - 4u_{yx} + e^{-u^2} = e^{-x^2}.$$

lineaarista osaa $u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy}$

vastaavan yhtälön

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy}$$

kertoimet ovat $A = 1$, $B = -2$, $C = 1$

$\Rightarrow$ neliömuodolle $At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$

pätee $B^2 - AC > 0$, sillä

$$(-2)^2 - 1 \cdot 1 = 3 > 0.$$

$\Rightarrow$ yhtälö on hyperbolinen.

(Jos olisi $B^2 - AC < 0$, olisi yhtälö elliptinen.
Jos taas $B^2 - AC = 0$ olisi yhtälö parabolinen.)

→

→ Huom. Yhtälön tyypin määrittämisestä neliömuodon perusteella: Tämän vuoden monisteessa ei ollut kopiota (Coltonin?) kirjasta, jossa olisi käyty eri yhtälötyypit läpi, tätä tehtävään ja tehtävään 3, vastaava tapaus on kuitenkin sivulla 22 (siinä ei tosin erikseen sanota että yhtälö on hyperbolinen.)

3.

Koska yhtälö on hyperbolinen, etsitään funktiot $\phi_1(x,y)$, $\phi_2(x,y)$ jotka toteuttavat yhtälöt

$$A\frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0$$

ja

$$A\frac{\partial \phi_2}{\partial x} + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)\frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + \left(\sqrt{3} - 2\right)\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = 0$$

ja

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \left(2 + \sqrt{3}\right)\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi_1(x,y) = (2-\sqrt{3})x + y$$

$$\phi_2(x,y) = (2+\sqrt{3})x + y$$

tällä muuttujan vaihdolla yhtälö saadaan vastaavaan muotoon $\tilde{u}_{\phi_1\phi_2} = 0$ →

$\Rightarrow$ missä $\tilde{u}(\phi_1, \phi_2) = u(x,y)$.

Olkoot nyt $\xi = \frac{1}{2}(\phi_1 + \phi_2) = 2x + y$

ja $\eta = \frac{1}{2}(\phi_2 - \phi_1) = \sqrt{3}x$

ja $v(\xi, \eta) = u(\eta/\sqrt{3}, \xi - 2\eta/\sqrt{3})$

$\Rightarrow$ $v_\xi(\xi,\eta) = u_y(x,y)$,

$v_\eta(\xi,\eta) = \frac{1}{\sqrt{3}} u_x(x,y) - \frac{2}{\sqrt{3}} u_y(x,y)$,

$\Rightarrow$ $v_{\xi\xi}(\xi,\eta) = u_{yy}(x,y)$,

$$v_{\eta\eta}(\xi,\eta) = \frac{1}{3} u_{xx}(x,y) - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} u_{xy}(x,y) - \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} u_{yx}(x,y) + (-1)^2 \frac{4}{3} u_{yy}(x,y)$$

$\Rightarrow$ $v_{\eta\eta} - v_{\xi\xi} = \frac{1}{3} u_{xx} - \frac{4}{3} u_{xy} + \frac{4}{3} u_{yy} - u_{yy}$

$$= \frac{1}{3}(u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy})$$

$\Rightarrow$ Tehtävän yhtälö on ekvivalentti yhtälön

$$v_{\eta\eta} - v_{\xi\xi} + e^{-v^2} = e^{-\frac{\eta}{\sqrt{3}}^2}$$

kanssa.

Huom! muuttujan vaihto ei ole yksikäsitteinen. Tehtävän voi ratkaista muullakin tavalla.

4-5.

$$u_{xx} = u_{tt}, \quad x \geq 0,\ t \geq 0,$$
$$u_t(0,t) = \alpha u_x(0,t), \quad t \geq 0,$$
$$u(x,0) = \phi_0(x), \quad x \geq 0$$
$$u_t(x,0) = \phi_1(x), \quad x \geq 0$$

Tässä $\alpha \neq -1$ on vakio, ϕ_1 ja ϕ_2 ovat kaksi kertaa paloittain derivoituvia ja häviävät paitsi välillä $[0,b]$.

Monisteessa on näytetty että muuttujan vaihdolla $y = x+t$, $z = x-t$ saadaan yhtälö $u_{xy} = 0 \Leftrightarrow u_{xx} = u_{tt}$ jolla ratkaisut ovat muotoa

$$u = \psi(y) + \eta(z) = \psi(x+t) + \eta(x-t)$$

missä ψ ja η ovat mielivaltaisia C^2-funktioita. Tämä on siis d'Alambertin ratkaisu. Nyt halutaan alkuehtojen toteutuvan. Sijoitetaan d'Alambertin ratkaisu alkuehtoihin

$$u_x(0,t) = \alpha u_x(0,t) \Rightarrow \psi'(x) - \eta'(-x) = \alpha\psi'(x) + \alpha\eta'(-x) \quad (1)$$
$$u_x(x,0) = \phi_0(x) \Rightarrow \psi(x) + \eta(x) = \phi_0(x) \quad (2)$$
$$u_x(x,0) = \phi_1(x) \Rightarrow \psi'(x) - \eta'(x) = \phi_1(x) \quad (3)$$

(missä (1) on aluksi saatu muuttujalle t jonka tilalle on sitten voitu sijoittaa x)

$\longrightarrow$

$\Rightarrow$ Nämä yhtälöt ovat voimassa kun $x \geq 0$. Nyt ψ pitää määritellä positiivisella reaaliakselilla ja η koko reaaliakselilla. Yhtälöistä (2) ja (3) voidaan laskea kun $x \geq 0$.

$$\begin{cases} \psi'(x) = \frac{1}{2}\left(\phi_0'(x) + \phi_1(x)\right) \\ \eta'(x) = \frac{1}{2}\left(\phi_0'(x) - \phi_1(x)\right) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} \psi(x) = \frac{1}{2}\left(\phi_0(x) + \int_0^x \phi_1(x)dx\right) + \psi(0) \\ \eta(x) = \frac{1}{2}\left(\phi_0(x) - \int_0^x \phi_1(x)dx\right) + \eta(0) \end{cases} \quad x \geq 0$$

Negatiivisilla muuttujan arvoilla η saadaan määriteltyä yhtälöstä (1) kun $x \geq 0$, laskemalla saadaan

$$(1) \iff (1-\alpha)\psi'(x) = (1+\alpha)\eta'(-x)$$

$$\iff \eta'(-x) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\psi'(x),$$

integroimalla saadaan

$$\eta(-x) = \eta(0) - \int_0^x \eta'(-\xi)d\xi = \eta(0) - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\int_0^x \psi'(\xi)d\xi$$

$$= \eta(0) - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\left(\frac{1}{2}\left(\phi_0(x) + \int_0^x \phi_1(x)dx\right) + \psi(0)\right).$$

$\longrightarrow$

ψ ja η ovat nyt vakiota vaille määritellyt. Lopulliseksi ratkaisuksi saadaan

kun $x-t \geq 0$: $u(x,t) = \psi(x+t) + \eta(x-t)$

$$= \frac{1}{2}\left(\phi_0(x+t) + \phi_0(x-t) + \int_0^{x+t} \phi_1(\xi)d\xi + \int_0^{x-t} \phi_1(\xi)d\xi\right) + \psi(0) + \eta(0),$$

kun $x-t<0$:

$$u(x,t) = \psi(x+t) + \eta(x-t)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\phi_0(x+t) - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\phi_0(t-x) + \int_0^{x+t} \phi_1(\xi)d\xi + \int_0^{t-x} \phi_1(\xi)d\xi\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\psi(0) + \eta(0)$$

alkuehdoista seuraa että $\psi(0)+\eta(0) = 0$.

Ratkaisun jatkuvuuden takaamiseksi pitää määritellä $\psi(0) = \eta(0) = 0$.

Ehto $\phi_0(x) = \phi_1(x) = 0$, $x \in [0,b]$ $(b>0)$

takaa nyt, että ratkaisu on todella kahdesti derivoituva suoralla $x=t$.

(Tämän tehtävän (4-5) ratkaisu on kopio kevään 2006 malleista, jotka teki Miika Nikula.)