Osittaisdifferentiaaliyhtälöt (Kevät 2012)
Harjoitus 3
Ratkaisuja (Jussi Martin)

1. Osoita, että funktio

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-(x-y)^2/(4t)} dy$$

toteuttaa lämpöyhtälön $u_t = u_{xx}$, kun $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$ ja g on vaikkapa paloittain jatkuva, rajoitettu funktio $\mathbb{R}$:ssä. Formaali derivointi integraalin sisällä riittää, mutta ylimääräistä kunniaa saa siitä, jos osaa selittää, miksi se on tässä luvallista.

Ratkaisu:
Nyt

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy,$$

joten viemällä derivointi integralin sisälle nähdään, että

$$u_x(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} -2\frac{(x-y)}{4t} g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy$$

ja tätä vielä kerran derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(-2\frac{(x-y)}{4t}\Big)^2 g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{2}{4t} g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy. \end{aligned}$$

Toisaalta, nyt

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(4\pi t)} \cdot \frac{4\pi}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(-2\frac{(x-y)}{4t}\Big)^2 g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} (-1)\Big(-\frac{(x-y)^2}{(4t)^2}\Big) g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(-2\frac{(x-y)}{4t}\Big)^2 g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy \\ &+ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{2}{4t} g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy = u_{xx}(x,t). \end{aligned}$$

(Perustelu tehtävissä 1. ja 2. esiintyvälle integraalin sisällä derivoimiselle esitetään näiden mallien lopussa.)

2. Osoita derivoimalla, että jos $h : \mathbb{R} \times [0, \infty[\to \mathbb{R}$ on annettu jatkuva ja rajoitettu funktio, niin Cauchyn probleeman

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t) + h(x,t) \quad , \; x \in \mathbb{R}, t > 0,$$
$$u(x,0) = 0 \quad , \; x \in \mathbb{R}$$

ratkaisu on

$$u(x,t) := \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi d\tau.$$

Ratkaisu:
Tekemällä samantapainen lasku kuin tehtävässä 1. saadaan, että

$$\begin{aligned} u_{xx}(x,t) &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \Big(\frac{-(x-\xi)^2}{2(t-\tau)}\Big) \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \Big(\frac{-1}{2(t-\tau)}\Big) \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Tarvitsemme seuraavaa kaavan

$$\frac{d}{dz}\Big(\int_a^z K(z,y)dy\Big) = K(z,z) + \int_a^z \frac{\partial K(z,y)}{\partial z} dy \tag{1}$$

(kaavan (1) johtaminen on tuleva harjoitustehtävä). Käytämme u_t:n laskemiseen kaavaa (1) siten, että

$$K(\tau,t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi,$$

jolloin siis

$$K(t,t) = \lim_{\tau \to t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi.$$

Näin nähdään, että

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= \lim_{\tau \to t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2(t-\tau)} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi d\tau \\ &+ \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \Big(\frac{-(x-\xi)^2}{2(t-\tau)}\Big) \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Vertaamalla tätä u_{xx}:n kaavaan huomataan, että

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= u_{xx} + \lim_{\tau \to t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,\tau) d\xi \\ &= u_{xx} + h(x,t), \end{aligned}$$

sillä jatkuvuuden nojalla

$$h(\xi,\tau) = h(\xi,t) + \varepsilon(x,t-\tau),$$

missä $\varepsilon(x,t-\tau) \to 0$, kun $\tau \to t$, lisäksi luentomonisteen lauseen 3.7. nojalla

$$\lim_{\tau\to t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)}} \exp\Big(\frac{-(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\Big) h(\xi,t)d\xi = h(x,t)$$

3. Toteuttaako yhtälön

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx} - t\sin(2x)u$$

ratkaisufunktio $u = u(x,t)$ joukossa $\Omega := \{(x,t) \mid 0 < x < \pi, 0 < t < T\}$ (mikäli olemassa) Lauseen 3.3 heikon maksimiperiaatteen? (muuttujanvaihto)

Ratkaisu:
Lauseessa 3.3. yhtälö on muotoa

$$u_t = u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u, \tag{2}$$

määrittely joukko Ω muotoa

$$\{(x,t) | L_1(t) < x < L_2(t), 0 < t < T\}$$

ja kerroin $b(x,t) \le 0$ joukossa. Määritelään uusi funktio $v(x,t) := u(ax,t)$. (Muuttujan t suhteen joukko on jo haluttaa muotoa, joten muunnos tehdään vain muuttujalle x). Tällöin, ketjusäännön perusteella:

$$v_{xx}(x,t) = a^2 u_{xx}(ax,t) \quad \Leftrightarrow \quad u_{xx}(ax,t) = a^{-2}v_{xx}(x,t). \tag{3}$$

Nyt halutaisiin, että v toteuttaa yhtälön

$$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) + \tilde{b}(x,t)v(x,t),$$

missä $\tilde{b}(x,t) := b(ax,t) = -t\sin(2(ax))$. Toisaalta yhtälön (3) perusteella, yhtälö (2) lausuttuna v:n suhteen, saa muodon

$$v_t(x,t) = \frac{a^{-2}}{4} v_{xx}(x,t) + \tilde{b}(x,t)v(x,t).$$

Tulee siis olla

$$\frac{a^{-2}}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

Tällöin $\tilde{b}(x,t) = -t\sin(x)$ ja yhtälö (2) lausuttuna v:n suhteen, saa muodon

$$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) - t\sin(x)v(x,t),$$

missä ratkaisu on nyt siis määritelty joukossa $(x,t) \in [0,2\pi] \times [0,T]$, koska $ax = \frac{x}{2} \in [0,\pi]$. Ratkaisu ei siis voi toteuta lauseen 3.3. kaikkia ehtoja, koska $-t\sin(x) > 0$ kun $x \in (\pi, 2\pi)$ ja $t > 0$; eikä siten alkuperäisen yhtälön ratkaisukaan voi toteuta heikkoa maksimiperiaatetta määrittelyjoukossaan.

4.-5. Käy läpi luennolla esitetty lämpöyhtälön alkuarvo–reuna–arvoprobleeman, kun $L = \pi$, reunafunktiot ovat $g_1(t) = e^{-t}$ ja $g_2(t) = 1$ ja alkuarvo $\phi(x) = 1$. Laske eksplisiittisesti menetelmässä esiintyvät Fourier–kertoimet. Mihin funktioon $h(x)$ ratkaisu $u(x,t)$ suppenee, kun $t \to \infty$?

Ratkaisu:
Tehtävän alkuarvo–reuna–arvoprobleema on siis muotoa

(4) $$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t)\ ,\ 0 < x < L,\ t > 0,$$
(5) $$u(x,0) = \phi(x)\ ,\ 0 \le x \le L,$$
(6) $$u(0,t) = g_1(t) = 0\ , u(L,t) = g_2(t)\ ,\ t \ge 0.$$

Moudostetaan uudet funtiot

$$w(x,t) := g_1(t) + (g_2(t) - g_1(t))\frac{x}{L},$$
$$v(x,t) := u(x,t) - w(x,t).$$

Tällöin v on seuraavan alkuarvo–reuna–arvoprobleeman ratkaisu:

(7) $$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t) - w_t(x,t)\ ,\ 0 < x < L,\ t > 0,$$
(8) $$v(x,0) = \phi(x) - w(x,0)\ ,\ 0 \le x \le L,$$
(9) $$v(0,t) = v(L,t) = 0\ ,\ t \ge 0.$$

Alkuperäisen propleeman ratkaisua varten meidän on konstuoitava ratkaisu seuraavalle probleemalle:

(10) $$\tilde{u}_t(x,t) = \tilde{u}_{xx}(x,t)\ ,\ 0 < x < L,\ t > 0,$$
(11) $$\tilde{u}(x,0) = \tilde{\phi}(x)\ ,\ 0 \le x \le L,$$
(12) $$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}(L,t) = 0\ , u(L,t) = g_2(t)\ ,\ t \ge 0.$$

Ratkaistaan $\tilde{u}$ alkuehdolla $\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - w(x,0)$. Tällöin funktio

$$u^\circ(x,t) := v(x,t) - \tilde{u}(x,t)$$

toteuttaa yhtälön

(13) $$u^\circ_t(x,t) = u^\circ_{xx}(x,t) - w_t(x,t)\ ,\ 0 < x < L,\ t > 0,$$
(14) $$u^\circ(x,0) = 0\ ,\ 0 \le x \le L,$$
(15) $$u^\circ(0,t) = u^\circ(L,t) = 0\ ,\ t \ge 0.$$

Koska $u^\circ = v - \tilde{u} = u - w - \tilde{u}$, on alkuperäisen porbleeman ratkaisu siis

$$u(x,t) = u^\circ(x,t) + w(x,t) + \tilde{u}(x,t).$$

Nyt

$$g_1(t) = e^{-t}, \quad g_2(t) = 1,$$
$$\phi(x) = 1, \quad L = \pi,$$
$$w(x,t) = 1 - (e^{-t} - 1)\frac{x}{\pi},$$

ja

$$\tilde{\phi}(x) = \phi(x) - w(x,0) = (1 - e^{-t})\frac{x}{\pi}$$

Luentomonistetta seuraten löydetään probleemalle (10)-(12) ratkaisu:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{\pi n}{L})^2 t} \sin\frac{n\pi x}{L} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx),\end{aligned}$$

missä

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \tilde{\phi}(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2(1 - e^{-t})}{\pi^2}\int_0^L x \sin(n\pi x) dx.$$

Osittaisintegroimalla saadaan, että

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2(1-e^{-t})}{\pi^2}\Big(-\frac{\pi}{n}(-1)^{n-1} - 0 - \int_0^\pi 1\cdot\Big(-\frac{\cos(nx)}{n}\Big)dx\Big) \\ &= \frac{2(1-e^{-t})}{n\pi}(-1)^n \end{aligned}$$

Ratkaisuksi $\tilde{u}$:lle saadaan siis

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-e^{-t})}{n\pi}(-1)^n e^{-n^2 t}\sin(nx).$$

Propleeman (13)-(15) ratkaisu puolestaan on

$$u^\circ(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{nx}{L} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin(nx),$$

missä

$$T_n(t) = \int_0^t f_n(t)\exp\Big(-\big(\frac{n\pi}{L}\big)^2(\tau - t)\Big)d\tau$$

kun

$$f_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^\infty f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

ja $f(x,t) = w_t(x,t)$. sijoittamalla

$$f(x,t) = w_t(x,t) = -e^{-t}\frac{x}{\pi}$$

ja $L=\pi$, sekä osittaisintegroimalla saadaan

$$\begin{aligned} f_n(t) &= -\frac{2}{\pi}e^{-t}\int_0^\pi x\sin(nx)dx \\ &= -\frac{2}{\pi}e^{-t}\Big(\frac{\pi(-1)^{n-1}}{n} - 0 - \int_0^\pi 1\cdot\Big((-\frac{\cos(nx)}{n}\Big)dx\Big) \\ &= \frac{2}{n\pi}e^{-t}(-1)^n. \end{aligned}$$

Täten

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \int_0^\pi \frac{2(-1)^n}{n\pi}e^{-\tau}e^{-n^2(t-\tau)}d\tau \\ &= \frac{2(-1)^n}{n\pi}e^{-n^2 t}\int_0^\pi e^{(n^2-1)\tau}d\tau \\ &= \begin{cases} -\frac{2}{\pi}e^{-t}(t-1), & \text{kun } n=1 \\ \frac{2(-1)^n}{n(n^2-1)\pi}(e^{-t}-e^{-n^2 t}), & \text{kun } n>1. \end{cases} \end{aligned}$$

Funtioksi u° saadaan siis

$$u^\circ(x,t) = -\frac{2}{n\pi}e^{-n^2 t}(t-1)\sin(x) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n(n^2-1)\pi}(e^{-t}-e^{-n^2 t})\sin(nx).$$

Alkuperäisen ongelman (4)-(6) ratkaisu on

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= w(x,t) + \tilde{u}(x,t) + u^{\circ}(x,t) \\
&= 1 - (e^{-t} - 1)\frac{x}{\pi} - 2e^{-t}\Big(\frac{(1-e^{-t})}{\pi} + \frac{1}{\pi}(t-1)\Big)\sin(x) \\
&\quad + \sum_{n=2}^{\infty} 2(-1)^n \Big(\frac{(1-e^{-t})}{n\pi} e^{-n^2 t} + \frac{1}{n(n^2-1)\pi}(e^{-t} - e^{-n^2 t})\Big)\sin(nx).
\end{aligned}
$$

Tästä nähdään, että

$$
u(x,t) \to 1 + \frac{x}{\pi}, \quad \text{kun} \quad t \to \infty.
$$

Perustelu tehtävien 1. ja 2. integraalin sisällä derivoimiselle.
Yleisesti pätee (Väliarvolause):

$$
f(x+h,y) - f(x,y) = \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x} h \quad \text{jollakin} \quad x_0 \in \,]x, x+h[, \quad \text{kun} \quad h > 0.
$$

Jos nyt $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ on jatkuva, on se tasaisesti jatkuva kaikissa nelikulmiossa $[a,b] \times [-M,M]$. Tällöin kaikilla $\varepsilon > 0$ ja $(x,y) \in [a,b[\times [-M,M]$ on olemassa $x_0 \in \,]x, x+h[$ ja δ_ε siten, että

$$
\Big|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\Big| = \Big|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x}\Big| < \frac{\varepsilon}{2M},
$$

kun $0 < h < \delta_\varepsilon$. Näin ollen

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_{-M}^{M} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy - \frac{1}{h}\Big(\int_{-M}^{M} f(x+h,y)dy - \int_{-M}^{M} f(x,y)dy\Big)\Big| \\
&\le \int_{-M}^{M} \Big|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\Big| dy < 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

ja koska $\varepsilon > 0$ oli mielivaltainen saadaan, että

$$
\frac{\partial}{\partial x} \int_{-M}^{M} f(x,y)dy = \int_{-M}^{M} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy.
$$

Tehtävässä 1.

$$
f(x,y) = g(y)\exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big)
$$

ja

$$
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{(y-x)}{2t} g(y) \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big).
$$

Tästä nähdään, koska g on rajoitettu funktio, että

$$
\begin{aligned}
\Big|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}\Big| &= \Big|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial f(x_0,y)}{\partial x}\Big| \\
&\le C|y| \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big), \quad \text{jollakin} \quad C > 0
\end{aligned}
$$

(kun x:n ja t:n arvot on kiinnitetty). Nyt saadaan, että

$$
\Big|\int_{-\infty}^{-M} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy - \frac{1}{h}\Big(\int_{-\infty}^{-M} f(x+h,y)dy - \int_{-\infty}^{-M} f(x,y)dy\Big)\Big|
$$

$$\leq \int_{-\infty}^{-M} C|y| \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy < \varepsilon$$

ja

$$\Big|\int_{M}^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy - \frac{1}{h}\Big(\int_{M}^{\infty} f(x+h,y)dy - \int_{M}^{\infty} f(x,y)dy\Big)\Big|$$

$$\leq \int_{M}^{\infty} C|y| \exp\Big(-\frac{(x-y)^2}{4t}\Big) dy < \varepsilon,$$

kun $M > 0$ on riittävän suuri.

Nähdään siis, että

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dy,$$

kun otetaan huomioon myös aiempi tulos välillä $[-M, M]$.

Derivointi t:n suhteen, toisen kertaluvun derivointi x:n suhteen, sekä tehtävän 2. vastaavat derivoinnit voidaan johtaa saman tapaisesti.