Osittaisdifferentiaaliyhtälöt (Kevät 2012)
Harjoitus 2
Ratkaisuja (Jussi Martin)

1. Ratkaise seuraava 1. kertaluvun ODY:n alkuarvotehtävä ($u = u(x, y)$), ja tutki, millä muuttujien arvoilla ratkaisu on olemassa:

$$u_x + u^2 u_y = 1, \quad u(x, 0) = 1.$$

Ratkaisu:
Karakteristiset yhtälöt:

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = z^2, \quad \frac{dz}{dt} = 1.$$

Alkuehdot:

$$x(s, 0) = s, \quad y(s, 0) = 0, \quad z(s, 0) = 1.$$

Helpoiten ratkeaa, että

$$x(s, t) = t + c_1(s) \overset{\text{alkuehto}}{=} t + s$$

ja

$$z(s, t) = t + c_3(s) \overset{\text{alkuehto}}{=} t + 1,$$

näistä puolestaan saadaan, että

$$\frac{dy}{dt} = (t + 1)^2 \quad \Rightarrow \quad y(s, t) = \frac{(t + 1)^3}{3} + c_2(s) \overset{\text{alkuehto}}{=} \frac{(t + 1)^3}{3} + \frac{1}{3}.$$

Nyt siis

$$y = \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad z = (3y + 1)^{1/3}$$

eli

$$u(x, y) = (3y + 1)^{1/3},$$

mikä on määritelty kaikkialla $\mathbb{R}^2$:ssa, koska juuri on pariton.

Tarkistetaan vielä, että ratkaisu toteuttaa yhtälön:

$$u_x \equiv 0, \quad u_y = \frac{1}{3}(3y + 1)^{-2/3} \cdot 3 = (3y + 1)^{-2/3}, \quad (y \neq -\frac{1}{3})$$

$$\Rightarrow \quad u^2 u_y = (3y + 1)^{2/3} \cdot (3y + 1)^{-2/3} \equiv 1, \quad \text{kun} \quad y \neq -\frac{1}{3}$$

Tässä on siis syytä panna merkille, että derivaatta u_y on singulaarinen pisteissä, joissa $y = -\frac{1}{3}$. Näin ollen ratkaisu onkin määritelty vain $\mathbb{R}^2$:n osajoukossa, jossa $y \neq -\frac{1}{3}$.

2. Olkoon $u = u(x, t)$, $0 \leq x \leq 2\pi$ ja $t \geq 0$. Ratkaise probleema

$$\begin{aligned} &u_t(x, t) = u_{xx}(x, t)\ ,\ 0 < x < 2\pi, t > 0, \\ &u(x, 0) = \sin(8x)\ ,\ 0 \leq x \leq 2\pi, \\ &u(0, t) = u(2\pi, t) = 0\ ,\ t \geq 0. \end{aligned}$$

Ratkaisu:
Luentomonisteessa on osoitettu, että yhtälön ratkaisu on muotoa

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_n e^{-(\frac{n\pi}{L})^2 t} \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{1}$$

(tässä tapauksessa $L = 2\pi$) ja se, että Fourier-kertoimet saadaan kaavasta

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx. \tag{2}$$

Koska tässä tehtävässä $f(x) = \sin(8x)$ on kerrointen laskemisessa on kätevää käytää sini-funktioiden ortogonaalisuus ehtoa

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n2\pi x}{L}\,\sin\frac{m2\pi x}{L}\,dx = \delta_{nm} \tag{3}$$

joka on tosi kaikilla n, $m \in \mathbb{N}$ (missä δ_{nm} on Kroneckerin delta, eli yhtä kuin 0, jos $m \neq n$, ja 1, jos $m = n$). Kaavan (3) johto on esitetty näiden mallien lopussa.

Koska $L = 2\pi$ ja

$$f(x) = \sin(8x) = \sin\frac{16\pi x}{2\pi}$$

saadaan, että

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{kun} \quad n = 16, \\ 0, & \text{kun} \quad n \neq 16. \end{cases}$$

Näin ollen ratkaisuksi saadaan

$$u(x,t) = e^{-64t}\sin(8x).$$

3. Olkoon $u = u(x,t)$, $-2 \leq x \leq 1$ ja $t \geq 1$. Muunna sopivalla muuttujanvaihdolla ongelma

$$\begin{aligned} &u_t(x,t) = 3u_{xx}(x,t)\ ,\ -2 < x < 1, t > 1, \\ &u(x,1) = \sin(\pi x)\ ,\ -2 \leq x \leq 1, \\ &u(-2,t) = u(1,t) = 0\ ,\ t \geq 1. \end{aligned}$$

luennolla esitettyyn muotoon. (Valitse vakiot a, b, c ja d siten, että funktio $v(x,t) := u(ax+b, ct+d)$ toteuttaa luennolla esitetyn lämpöyhtälön alku-reuna-arvo-ongelman.)

Ratkaisu:
Olkoon

$$v(x,t) := u(ax+b, ct+d).$$

Jotta v olisi luennoilla esitetyn lämpöyhtälön ratkaisu, tulee sen toteuttaa ehdot

$$v_t(x,t) = v_{xx}(x,t)\ ,\ 0 < x < L, t > 0, \tag{4}$$

$$v(x,0) = \phi(x)\ ,\ 0 \leq x \leq L, \tag{5}$$

$$v(0,t) = v(L,t) = 0\ ,\ t \geq 0; \tag{6}$$

missä ϕ on annettu alkuehtofunktio $\sin(\pi x)$ lausuttuna uusissa koordinaateissa.

Jotta yhtälö (6) pätisi, tulee välin $[0, L]$ kuvautua koordinaatti muunnoksessa $x \mapsto ax + b$ väliksi $[-2, 1]$. Vaaditaan siis, että

$$a(0) + b = -2 \quad \text{ja} \quad aL + b = 1$$

Näistä ensimmäisestä saadaan, että $b = -2$ ja toisesta, $aL + b = 1$; mihin sijoittamalla $b = -2$, saadaan että $a = 3/L$.

Jotta yhtälö (5) pätisi, tulee välin $[0, \infty[$ kuvautua väliksi $[1, \infty[$, mistä saadaan yhtälö

$$c(0) + d = 1$$

eli tulee olla $d = 1$.

Ketjusääntöä käyttämällä nähdään, että

(7) $$v_{xx}(x,t) = (3/L)^2 u_{xx}(3/Lx - 2, ct + 1)$$

ja

(8) $$v_t(x,t) = cu_t(3/Lx - 2, ct + 1).$$

Nyt u toteuttaa yhtälön

$$u_t(x,t) = 3u_{xx}(x,t).$$

Toisaalta v:n halutaan toteuttavan (4) mikä u:lla tarkoittaa yhtälöä yhtälöiden (7) ja (8) nojalla yhtälöä

$$cu_t(3/Lx - 2, ct + 1) = (3/L)^2 u_{xx}(3/Lx - 2, ct + 1).$$

Tulee siis olla $c^{-1}(3/L)^2 = 3$ eli $c = 3/L^2$.

Funktio $v(x,t) = u(3/Lx - 2, 3/L^2 + 1)$ toteuttaa siis luennolla esitetyn lämpöyhtälön eli yhtälöt (4), (5) ja (6); missä alkuarvofunktioksi sadaan

$$\phi(x) = u(3/Lx - 2, 1) = \sin(\pi(3/Lx - 2)).$$

4.-5. Käy läpi luennolla esitetty lämpöyhtälön alkuarvo–reuna–arvoprobleeman ratkaisu, kun $L = 1$, reunafunktiot g_1 ja g_2 ovat 0, ja alkuarvo $\phi(x) = x(1-x)$. Laske menetelmässä esiintyvät Fourier–kertoimet. Mihin funktioon $h(x)$ ratkaisu $u(x,t)$ suppenee, kun $t \to \infty$?

Ratkaisu:

Kuten tehtävässä 2. tiedetään ratkaisun olevan, luentomonisteen nojalla, muotoa (1); missä Fourier-kertoimet saadaan kaavasta (2).

Nyt $L = 1$ ja $f(x) = x(1-x)$, joten

$$a_n = 2\int_0^1 x(1-x)\sin(n\pi x)dx.$$

Osittaisintegroimalla kaksi kertaa saadaan, että

$$\begin{aligned} a_n &= 2\big(0-0\big) - 2\int_0^1 (1-2x)\Big(-\frac{\cos(n\pi x)}{n\pi}\Big)dx \\ &= 2\big(0-0\big) - 2\int_0^1 (-2)\frac{\sin(n\pi x)}{(n\pi)^2}dx \\ &= \frac{4}{(n\pi)^3}\int_0^1 n\pi\sin(n\pi x)dx = \frac{4}{(n\pi)^3}\big((-1)^n - 1\big), \end{aligned}$$

koska sijoitustermit häviävät kummassakin osittaisintegroinnissa. Näin ollen ratkaisuksi saadaan

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(n\pi)^3}\big((-1)^n - 1\big)e^{-(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x).$$

Nyt

$$0 < e^{-(n\pi)^2 t} \le e^{-\pi^2 t} \quad \text{ja} \quad |\sin(n\pi x)| \le 1 \quad \text{kaikilla } n \ge 1,$$

joten

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \Big| \frac{4}{(n\pi)^3}\big((-1)^n - 1\big)e^{-(n\pi)^2 t}\sin(n\pi x)\Big| \\ &\leq e^{-\pi^2 t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(n\pi)^3}; \end{aligned}$$

missä sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{(n\pi)^3}$$

on yliharmonisena sarjana suppeneva. Näin nähdään, että jollakin $C > 0$ ja kaikilla $x \in [0,1]$ pätee

$$|u(x,t)| \leq Ce^{-\pi^2 t} \to 0, \quad \text{kun} \quad t \to \infty$$

eli ratkaisu $u(x,t)$ suppenee kohti nollafunktiota, kun $t \to \infty$.

Kaavan (3) johto:

Tiedetään, että

$$\sin\frac{n2\pi x}{L} = \frac{1}{2i}\Big(\exp\big(\frac{in2\pi x}{L}\big) - \exp\big(-\frac{in2\pi x}{L}\big)\Big)$$

ja

$$\cos\frac{n2\pi x}{L} = \frac{1}{2}\Big(\exp\big(\frac{in2\pi x}{L}\big) + \exp\big(-\frac{in2\pi x}{L}\big)\Big),$$

joten

$$\begin{aligned} \sin\frac{n2\pi x}{L}\sin\frac{m2\pi x}{L} &= -\frac{1}{4}\big(\exp\big(\frac{i(n+m)2\pi x}{L}\big) - \exp\big(\frac{i(n-m)2\pi x}{L}\big) \\ &\quad -\exp\big(\frac{-i(n-m)2\pi x}{L}\big) + \exp\big(\frac{-i(n+m)2\pi x}{L}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\exp\big(\frac{i(n-m)2\pi x}{L}\big) + \exp\big(\frac{-i(n-m)2\pi x}{L}\big) \\ &\quad -\frac{1}{4}\exp\big(\frac{i(n+m)2\pi x}{L}\big) + \exp\big(\frac{-i(n+m)2\pi x}{L}\big)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\cos\big(\frac{(n-m)2\pi x}{L}\big) - \cos\big(\frac{(n+m)2\pi x}{L}\big)\Big). \end{aligned}$$

Tätä käyttämällä nähdään, että

$$\frac{2}{L}\int_0^L \sin\frac{n2\pi x}{L}\,\sin\frac{m2\pi x}{L}\,dx = \begin{cases} \frac{2}{L}(\frac{L}{2}+0) = 1, & \text{kun} \quad n = m, \\ \frac{2}{L}(0-0) = 0, & \text{kun} \quad n \neq m. \end{cases}$$