Osittaisdifferentiaaliyhtälöt (Kevät 2012)
Harjoitus 11
Ratkaisuja (Jussi Martin)

1.-2. Etsi ominaisarvoja λ ja ominaisfunktioita $f \neq 0$, jotka ovat integraaliyhtälön

$$\lambda f(x) - \int_0^\pi K(x,y)f(y)dy = 0, \quad x \in [0,\pi]$$

ratkaisuja, kun

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} \sin(nx)\sin(ny).$$

(Käytä trigonometristen funktioiden ortogonaalisuutta.)

Ratkaisu:
Nyt operaatorin

$$A : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi), \quad f(x) \mapsto \int_0^\pi K(x,y)f(y)dy$$

kuvajoukon alkiot ovat muotoa

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2}\sin(nx), \quad \text{missä} \quad c_n := \int_0^\pi \sin(ny)f(y)dy,$$

sillä summaus voidaan siirtää integraalin ulkopuolelle, koska jokaisella $m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^\pi \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}\sin(nx)\sin(ny)f(y)dy = \sum_{n=1}^{m}\sin(nx)\int_0^\pi e^{-n^2}\sin(ny)f(y)dy$$

$$+ \int_0^\pi \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-n^2}\sin(nx)\sin(ny)f(y)dy$$

ja viimeisen integraalin sisällä oleva termi lähestyy nollaa, kun m lähestyy ääretön, koska

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} e^{-n^2}\sin(nx)\sin(ny)f(y)\Big\|_2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}\|\sin(ny)\|_2\|f(y)\|_2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

ja siten sarja suppenee itseisesti avaruudessa $L^2(0,\pi)$ jokaisella $x \in [0,\pi]$; tästä puolestaaan seuraa, että

$$\lim_{m\to\infty} \Big| \int_0^\pi \sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-n^2}\sin(nx)\sin(ny)f(y)dy\Big|$$

$$\leq \|\sin(ny)\|_2\|f(y)\|_2 \int_0^\pi \lim_{m\to\infty}\Big|\sum_{n=m+1}^{\infty} e^{-n^2}\Big|dy = 0.$$

Nyt on siis ominaisfunktioidenkin kuuluttava sellaiseen $L^2(0,\pi)$:n aliavaruuteen, jonka alkiot voidaan esittää Fourier-sinisarjoina. Riitää siis tarkastella miten funktiot $\sin(kx)$ kuvautuvat kuvauksessa

$$f(x) \mapsto \int_0^\pi K(x,y)f(y)dy.$$

Voimme käyttää ortogonaalisuutta:

$$\int_0^\pi K(x,y)\sin(ky)dy = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}\sin(nx)\int_0^\pi \sin(ny)\sin(ky)dy$$

$$= \frac{\pi e^{-k^2}}{2}\sin(kx), \quad \text{sillä} \quad \int_0^\pi \sin(ny)\sin(ky)dy = \frac{\pi\delta_{nk}}{2},$$

missä $\delta_{nk} = 1$, kun $n = k$ ja $\delta_{nk} = 0$, kun $n \neq k$ (ns. Kroneckerin delta). Ominaisfunktiota ovat siis funktiot $\sin(kx)$, $k \in \mathbb{N}$ ja niitä vastaavat ominaisarvot ovat $\lambda_k = \frac{\pi}{2}e^{-k^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ominaisarvoon $\lambda = 0$ liittyvä ominaisavaruus puolestaan on ääretönulotteinen ja sen virittävät funktiot $\cos(nx)$, mikä seuraa siitä, että

$$\int\limits_0^1 \cos(nx)\sin(mx)dx = 0 \quad \text{kaikilla} \quad (n,m) \in \mathbb{N}^2.$$

Toisin sanoen ominaisarvon $\lambda = 0$ liittyvät ominaisfunktiot ovat muotoa

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(nx), \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 < \infty.$$

3.-5. Onko integraaliydin

k) $K(s,t) = 1 + \sin(\pi(s+t))$,

e) $K(s,t) = e^{-(s-t)}$

s) $K(s,t) = e^{-|s-t|}$

ä) $K(s,t) = e^{-(s-t)^2}$

(s, $t \in [0,1]$) degeneroitunut, eli muotoa

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(s)N_j(t) \tag{1}$$

jollekin $n \in \mathbb{N}$ ja joillekin funktioille $M_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ ja $N_j : [0,1] \to \mathbb{R}$? Kohdassa s) riitää perusteltu arvaus.

Jos vastaus on positiivinen, ortonormita jono $(N_j)_{j=1}^n$ avaruuden $L^2([0,1])$ sisätulon $(\phi|\psi) := \int_0^1 \phi(s)\psi(s)ds$ suhteen, ja esitä ydin K muodossa (1) tämän uuden jonon avulla. Negatiivisen vastauksen tapauksessa riittää perusteltu arvaus.

Ratkaisu:

k)-kohta:
Nyt

$$K(s,t) = 1 + \sin(\pi(s+t)) = 1 + \sin(\pi s)\cos(\pi t) + \cos(\pi s)\sin(\pi t)$$

$$= 1(s)1(t) + \sin(\pi s)\cos(\pi t) + \cos(\pi s)\sin(\pi t)$$

(missä siis $1(s) \equiv 1$ ja $1(t) \equiv 1$) eli K on degeneroitunut.

Palautetaan mieliin Gram-schmidt-ortogonalisointi. Sisätuloavaruuden E jonosta $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ saadaan muodostettua uusijono $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$, joka ortonormaali eli $(\bar{e}_i|\bar{e}_j) = \delta_{ij}$ ja virittää saman aliavaruuden kuin alkuperäinen jono. Tämä tehdään seuraavasti: valitaan ensin jono

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{b}_k = \bar{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(\bar{a}_k|\bar{b}_i)}{|\bar{b}_i|^2}\bar{b}_i \quad \text{missä} \quad |\bar{b}_i| = \sqrt{(\bar{b}_i|\bar{b}_i)}$$

ja tällöin haluttu jono on $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n = \frac{\bar{b}_1}{|\bar{b}_1|}, \ldots, \frac{\bar{b}_n}{|\bar{b}_n|}$.

Nyt siis meillä on jono $\bar{a}_1 = 1(t)$, $\bar{a}_2 = \cos(\pi t)$, $\bar{a}_2 = \sin(\pi t)$ avaruudessa $L^2(0,1)$ josta alamme muodostamaan haluttua ortonormaalia jonoa:

$$\bar{b}_1 = 1(t), \quad \bar{b}_2 = \cos(\pi t) - \frac{\big(\cos(\pi t)\big|1(t)\big)}{\|1(s)\|_2^2}1(t)$$

$$= \cos(\pi t) - \frac{\int_0^1 \cos(\pi t)1(t)dt}{\int_0^1 1^2(t)dt}1(t) = \cos(\pi t) - 0 \cdot 1(t) = \cos(\pi t),$$

$$\bar{b}_3 = \sin(\pi t) - \left(\frac{\big(\sin(\pi t)\big|1(t)\big)}{\|1(s)\|_2^2}1(t) + \frac{\big(\sin(\pi t)\big|\cos(\pi t)\big)}{\|\cos(\pi t)\|_2^2}\cos(\pi t)\right)$$

$$= \sin(\pi t) - \left(\frac{\int_0^1 \sin(\pi t)1(t)dt}{\int_0^1 1^2(t)dt}1(t) + \frac{\int_0^1 \sin(\pi t)\cos(\pi t)dt}{\int_0^1 \cos^2(\pi t)dt}\cos(\pi t)\right)$$

$$= \sin(\pi t) - \left(\frac{2}{\pi}1(t) + \frac{\frac{1}{2}\int_0^1 \sin(2\pi t)dt}{\frac{1}{2}\int_0^1 \big(1 + \cos 2(\pi t)\big)dt}\cos(\pi t)\right)$$

$$= \sin(\pi t) - \left(\frac{2}{\pi}1(t) + 0 \cdot \cos(\pi t)\right) = \sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}1(t).$$

Ja tällöin

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{b}_1}{|\bar{b}_1|} = \frac{1(t)}{|1(t)|} = \frac{1(t)}{\int_0^1 1^2(t)dt} = 1(t),$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{b}_2}{|\bar{b}_2|} = \frac{\cos(\pi t)}{\|\cos(\pi t)\|_2} = \frac{\cos(\pi t)}{\sqrt{\int_0^1 \cos^2(\pi t)dt}}$$

$$= \frac{\cos(\pi t)}{\sqrt{\frac{1}{2}\int_0^1 \big(1 + \cos 2(\pi t)\big)dt}} = \sqrt{2}\cos(\pi t),$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{b}_3}{|\bar{b}_3|} = \frac{\sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}1(t)}{\|\sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}1(t)\|_2} = \frac{\sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}1(t)}{\sqrt{\int_0^1 \big(\sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}\big)^2 dt}}$$

$$= \frac{\sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}1(t)}{\sqrt{\int_0^1 \big(\sin^2(\pi t) - 2\sin(\pi t)\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\big)dt}}$$

$$= \frac{\sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}1(t)}{\sqrt{\int_0^1 \Big(\frac{1}{2}\big(1 - \cos(2\pi t)\big) - 2\sin(\pi t)\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}\Big)dt}}$$

$$= \frac{\sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}1(t)}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}}} = \sqrt{\frac{\pi + 8(\pi + 1)}{2\pi^2}}\big(\sin(\pi t) - \frac{2}{\pi}1(t)\big).$$

Nyt voimme laskea, että

$$\bar{a}_1 = \bar{e}_1, \quad \bar{a}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{e}_2, \quad \text{ja} \quad \bar{a}_3 = \Big(\frac{\sqrt{2}\pi}{\sqrt{\pi + 8(\pi + 1)}}\Big)\Big(\bar{e}_3 + \frac{2}{\pi}\bar{e}_1\Big)$$

ja näitä yhtälöitä käytämällä saamme ytimelle K ortonormaalissa kannassa $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ esityksen:

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \bar{e}_1 + \frac{\sin(\pi s)}{\sqrt{2}}\bar{e}_2 + \Big(\frac{\sqrt{2}\pi\cos(\pi s)}{\sqrt{\pi + 8(\pi+1)}}\Big)\Big(\bar{e}_3 + \frac{2}{\pi}\bar{e}_1\Big) \\ &= \Big(1 + \frac{2\sqrt{2}\cos(\pi s)}{\sqrt{\pi+8(\pi+1)}}\Big)\bar{e}_1 + \Big(\frac{\sin(\pi s)}{\sqrt{2}}\Big)\bar{e}_2 + \Big(\frac{\sqrt{2}\pi\cos(\pi s)}{\sqrt{\pi+8(\pi+1)}}\Big)\bar{e}_3. \end{aligned}$$

e)-kohta:
Nyt

$$K(s,t) = e^{-(s-t)} = e^{-s}e^t$$

eli K on degeneroitunut. Ortonormitetaan funktio e^t $L^2(0,1)$:ssä:

$$\bar{e}_1 = \frac{e^t}{\|e^t\|_2} = \frac{e^t}{\sqrt{\int_0^1 e^{2t}dt}} = \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{2}(e^2 - e^0)}} = \sqrt{\frac{2}{e^2-1}}e^t.$$

Saamme siis K:lle esitykseksi tässä ortonormaalissa kannassa:

$$K(s,t) = \Big(\sqrt{\frac{e^2-1}{2}}e^{-s}\Big)\bar{e}_1.$$

kohdat s) ja ä):
Nyt funktio $K(s,t) = K(t,s)$ kaikilla $(s,t) \in [0,1]^2$ eli funktio on symmetrinen s:n ja t:n vaihdon suhteen. Tästä seuraa, että mikäli K on degeneroitunut, voidaan se esittää muodossa, jossa $M_j(s) = N_j(s)$ kaikilla $j = 1,\dots,n$, kun funktioiden sallitaan olla kompleksiarvoisia ja indeksijoukko kasvatetaan kolminkertaiseksi. Tämä nähdään seuraavasti:

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \frac{1}{2}\Big(K(s,t) + K(t,s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^n M_j(s)N_j(t) + \sum_{j=1}^n M_j(t)N_j(s)\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^n \big(M_j(s) + N_j(s)\big)\big(M_j(t) + N_j(t)\big) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n M_j(s)M_j(t) - \sum_{j=1}^n N_j(s)N_j(t)\Big) = \sum_{j=1}^{3n} \widehat{M}_j(s)\widehat{M}_j(t), \end{aligned}$$

missä

$$\widehat{M}_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(M_j + N_j\Big), & \text{kun} \quad 1 \le j \le n, \\ \frac{i}{\sqrt{2}}M_{j-n}, & \text{kun} \quad n+1 \le j \le 2n \\ \frac{i}{\sqrt{2}}N_{j-2n}, & \text{kun} \quad 2n+1 \le j \le 3n \end{cases}$$

Oletetaan, että K on degeneroitunut ja esitetty muodossa

$$K(s,t) = \sum_{j=1}^n M_j(s)M_j(t). \tag{2}$$

Kiinnitetään arvo $t = 1$ ja aletaan muodostamaan lineaarisia yhtälöitä eri s:n arvoilla. Ensin saadaan

$$\sum_{j=1}^n M_j(s_1)M_j(1) = K(s_1, 1),$$

jollakin s_1:n valinnalla. Nyt voimme valita uuden arvon $s_2 \neq s_1$ siten, että

$$\big(M_1(s_1),\dots,M_n(s_1)\big) \neq \alpha\big(M_1(s_2),\dots,M_n(s_2)\big) \quad \text{kaikilla} \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

Tämä nähdään seuraavasti: Tehdään vastaoletus, että kaikilla $s \neq s_1$ on olemassa $\alpha(s) \in \mathbb{C}$ siten, että

$$\big(M_1(s_1), \dots, M_n(s_1)\big) = \alpha(s)\big(M_1(s), \dots, M_n(s)\big).$$

Ensinäkin voidaan sulkea pois tapaus jossa $\alpha(s) = 0$ jollakin $s \neq s_1$, sillä tällöin pätisi

$$\big(M_1(s_1), \dots, M_n(s_1)\big) = 0,$$

josta puolestaan seuraisi se, että

$$K(s_1, t) = \sum_{j=1}^{n} M_j(s_1) M_j(t) = 0;$$

mikä ei ole mahdollista, koska ytimen määritelmässä esiintyvä eksponenttifunktio on aina positiivinen. Tarkastellaan siis tapausta, jossa $\alpha(s) \neq 0$ kaikilla $s \neq s_1$ (ja $\alpha(s_1) = 1$). Tällöin

$$\big(M_1(s), \dots, M_n(s)\big) = \alpha(s)^{-1}\big(M_1(s_1), \dots, M_n(s_1)\big)$$

eli

$$M_k(s) = \alpha(s)^{-1} M_k(s_1) \quad \text{kaikilla} \quad k = 1, \dots, n$$

ja siten

$$\begin{aligned} K(s,t) &= \sum_{j=1}^{n} M_j(s) M_j(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha(s)^{-1} M_j(s_1) \alpha(t)^{-1} M_j(s_1) \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{n} M_j(s_1)^2\Big) \alpha(s)^{-1} \alpha(t)^{-1} =: C\alpha(s)^{-1}\alpha(t)^{-1}. \end{aligned}$$

Tämä kuitenkin johtaa ristiriitaan sillä, valitsemalla $s = t$ päädytään sekä s) että ä)-kohdaan ytimellä yhtälöön

$$K(t,t) = e^0 = 1.$$

Mistä seuraa, että

$$C\alpha(t)^{-2} \equiv 1 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha(t)| \equiv |C^{-1}|.$$

Toisaalta valitsemalla $s = 0$ saadaan s)-kohdan ytimellä yhtälö

$$K(0,t) = e^{-t}$$

ja ä)-kohdan ytimellä yhtälö

$$K(0,t) = e^{-t^2}.$$

Nämä puolestaan johtavat yhtälöihin

$$C\alpha(0)\alpha(t) = e^{-t} \quad \text{ja} \quad C\alpha(0)\alpha(t) = e^{-t^2},$$

joissa saadaan aikaiseksi haluttu ristiiita arvoihin $s = t$ liittyvän yhtälön kanssa, kun valitaan t:n arvo sopivasti.

Samaa perustelua käyttäen voimme induktiivisesti valita luvut $s_1, \dots s_{n+1}$, joilla

$$\big(M_1(s_j), \dots, M_n(s_j)\big) \neq \alpha\big(M_1(s_k), \dots, M_n(s_k)\big) \quad \text{kaikilla} \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

kaikilla pareilla $1 \leq j < k \leq n+1$. Näin on saatu yhtälöryhmä, jossa on $n+1$ kappaletta lineaarisia yhtälöitä

$$\sum_{j=1}^{n} M_j(s_k) M_j(1) = K(s_k, 1),$$

jotka ovat keskenään lineaarisesti riippumattomia, mutta vain n kappaletta tuntemattomia muuttujia $M_j(1)$. Tällaisella yhtälöryhmällä voi olla vain triviaaliratkaisu

$$\big(M_1(1), \ldots, M_n(1)\big) = (0, \ldots, 0)$$

ja sekin vain siinä tapauksessa, että

$$\big(K(s_1, 1), \ldots, K(s_{n+1}, 1)\big) = (0, \ldots, 0);$$

mikä ei toteudu meidän tapauksissamme, sillä $e^x > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Funktio K ei voi siis olla degeneroitunut.