ODY KEVÄT 2012
HARJOITUS 10

Malliratkaisut
(Jussi Martin)

1. Seuraavan Fredholmin integraaliyhtälön ratkaisu on enintään toisen asteen polynomi. Etsi ratkaisu (alkeellisesti) sijoittamalla tällainen polynomi yhtälöön ja ratkaisemalla kertoimet.

$$\phi(s) = s + \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(s+t)\phi(t)\,dt, \quad s \in [-1,1],$$

Ratkaisu:

olkoon $\phi(s) = a + bs + cs^2$. Tällöin

$$\int_{-1}^{1}(s+t)\phi(t)\,dt = s\int_{-1}^{1}(a+bt+ct^2)\,dt + \int_{-1}^{1}(at+bt^2+ct^3)\,dt$$

$$= s\Big/_{-1}^{1}\, at + \frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{3} + \Big/_{-1}^{1}\, \frac{at^2}{2} + \frac{bt^3}{3} + \frac{ct^4}{4} = 2as + \frac{2cs}{3} + \frac{2b}{3}.$$

Sijoittamalla yrite yhtälöön saadaan siis yhtälö

$$a + bs + cs^2 = s + \frac{1}{2}\left(2as + \frac{2cs}{3} + \frac{2b}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad a + bs + cs^2 = (1+a)s + \frac{cs}{3} + \frac{b}{3}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{b}{3}, \quad c = 0 \text{ ja } b = 1 + a + \overbrace{\frac{c}{3}}^{=0} = 1 + a$$

$\longrightarrow$

Joista saadaan yhtälöt

$$3a = 1 + a \iff a = \frac{1}{2} \quad (*)$$

ja

$$b = 3a \overset{(*)}{\implies} b = \frac{3}{2},$$

Näin ollen ratkaisuksi saadaan

$$\phi(s) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}s.$$

2. Samoin yhtälölle

$$\phi(s) = 1 + \int_0^{2\pi} \cos(s-t)\phi(t)dt, \quad s \in [0, 2\pi].$$

1

Ratkaisu
Kokeilemalla nähdään, että ratkaisuksi kelpaa funktio $\phi(s) \equiv 1$, sillä

$$1 = 1 + \int_0^{2\pi} \cos(s-t)dt, \quad \text{koska} \quad \int_0^{2\pi} \cos(s-t)dt = 0.$$

3. Onko Fredholmin integraaliyhtälöllä

$$\phi(s) - \int_0^1 e^{-t+s}\phi(t)dt = s^2, \quad s \in [0,1].$$

ratkaisua? (Osoita, että adjungoidun homogeeniyhtälön ratkaisun täytyy olla muotoa Ce^{-s}.)

Ratkaisu
Tässä voidaan yhtä hyvin osoittaa, että itse varsinaisen homogeeniyhtälön (eikä siis adjungoidun) ratkaisu on muotoa Ce^s, mikä on suoraviivaisempaa. Tutkitaan siis homogeeniyhtälöä

$$\phi(s) - \int_0^1 e^{-t+s}\phi(t)dt = 0 \quad s \in [0,1].$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi(s) - e^s \int_0^1 e^{-t}\phi(t)dt = 0 \quad s \in [0,1].$$

Nyt integraali $\int_0^1 e^{-t}\phi(t)dt$ ei riipu muuttujasta s ja on siten jokin reaalinen vakio C eli saamme yhtälön

$$\phi(s) - e^s C = 0, \quad s \in [0,1]. \quad \Leftrightarrow \quad \phi(s) = Ce^s, \quad s \in [0,1].$$

Tässä C:ksi kelpaa mikä tahansa reaaliluku, sillä sijoittamalla ratkaisun $\phi(s) = Ce^s$ takaisin homogeeniseen yhtälöön saamme:

$$Ce^s - \int_0^1 e^{-t+s}Ce^t dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ce^s - Ce^s \int_0^1 e^0 dt = 0,$$

mikä pätee vakiosta C riippumatta, koska integraali saa arvon 1.

Nyt alkuperäisellä integraaliyhtälöllä on ratkaisu jos ja vain jos homogeeniyhtälön ratkaisu on ortogonaalinen avaruudessa $L^2(0,1)$ funktion s^2 kanssa (Fredholmin alternatiivi Lause 9.4. tapaus (2)). Tutkitaan onko näin:

$$\int_0^1 Ce^t t^2 dt = \Big/_0^1 e^t t^2 - \int_0^1 e^t 2t = e - 0 - \left(\Big/_0^1 e^t 2t - \int_0^1 e^t 2dt\right)$$

$$= e - 2e - 2\Big/_0^1 e^t = e - 2e - 2e - 2 = -3e - 2 \neq 0.$$

Ei ole. Näin ollen ei tehtävän integraaliyhtälöllä voi olla ratkaisua.

4. Entä onko yhtälöllä

$$\phi(s) + \int_0^1 e^{-t+s}\phi(t)dt = s^2, \quad s \in [0,1].$$

ratkaisua?

Ratkaisu
Kuten edellisessä tehtävässä, tutkimme onko homogeeniyhtälöllä ratkaisua. Nyt

$$\phi(s) + \int_0^1 e^{-t+s}\phi(t)dt = 0 \quad s \in [0,1].$$

$$\Leftrightarrow \quad \phi(s) + e^s \int_0^1 e^{-t}\phi(t)dt = 0 \quad s \in [0,1].$$

mistä saadaan, että

$$\phi(s) + e^s C = 0, \quad s \in [0,1]. \quad \Leftrightarrow \quad \phi(s) = -Ce^s, \quad s \in [0,1].$$

missä $C = \int_0^1 e^{-t}\phi(t)dt$. Sijoittamalla ratkaisun $\phi(s) = -Ce^s$ takaisin homogeeniseen yhtälöön, saamme että

$$-Ce^s + \int_0^1 e^{-t+s}(-Ce^t)dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -Ce^s - Ce^s \int_0^1 e^0 dt = 0,$$

mikä on mahdollista vain jos $C = 0$. Koska homogeeniyhtälöllä on vain triviaaliratkaisu $\phi \equiv 0$, on alkuperäisellä tehtävän integraaliyhtälöllä olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $\phi \in L^2(0,1)$ (Fredholmin alternatiivi Lause 9.4. tapausta (2)).

4.-5. Osoita, että yksikerrospotentiaali

$$u(\bar{x}) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial\Omega} \psi(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} d\sigma(\bar{y})$$

on jatkuva joukossa $\mathbf{R}$, kun $\psi \in C^1(\partial\Omega)$.
Ohje. On osoitettava, että kaikilla $\bar{x}_0 \in \Omega$,

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x}_0} = u(\bar{x}_0),$$

missä $\bar{x}$ on joko sisä- tai ulkoalueessa. Käytä luentojen kaavaa (9.13) (joka pätee kaikilla $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$) ja ota siinä sellainen funktio $v \in C^2(\mathbf{R}^2)$, että $v(\bar{x}) = 0$ joukossa $\partial\Omega$ ja $\partial_\nu v(\bar{x}) = \psi(\bar{x})$ joukossa $\partial\Omega$. On käytettävä tietoa, että pintaintegraalitermi on jatkuva $\bar{x}$:n funktio, mikä seurasi Poissonin yhtälöön liittyvistä tarkasteluista luvussa 8.

Huomautus tehtäviin 3. ja 4. Luentojen lauseeseen 9.4. oli jäänyt pikku lipsahdus: lauseen viimeisellä rivillä ϕ_j:t ja ψ_j:t pitää vaihtaan keskenään.

Ratkaisu:
Oletetaan, että ohjeessa kuvailtu funktio v on olemassa, mikä ei ole täysin itsestään selvää (funktion v kostruktion idea, jota ei kannata opetella koetta varten, on esitetty näiden mallien lopussa).

Jos nyt $\bar{x} \in \Omega$, sivun 57 kaavaa 9.13. käyttämällä, saamme että

$$-2\pi v(\bar{x}) = \int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} d\bar{x}$$

$$+ \int\limits_{\partial\Omega} \Big(v(\bar{y}) \partial_{\nu(\bar{y})} \log \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} - \log \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} \partial_{\nu(\bar{y})} v(\bar{y}) \Big) d\sigma,$$

sillä sivun 57 kaavaan 9.13. $p(\bar{x}) = -2\pi$, kun $\bar{x} \in \Omega$. Nyt v oli valittu s.e. $v(\bar{y}) = 0$ joukossa $\partial\Omega$ ja $\partial_{\nu(\bar{y})} v(\bar{y}) = \psi(\bar{y})$ joukossa $\partial\Omega$. Näin ollen kaava saa muodon

$$-2\pi v(\bar{x}) = \int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} d\bar{x} - \int\limits_{\partial\Omega} \log \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} \psi(\bar{y}) d\sigma$$

$$\Leftrightarrow \quad -2\pi v(\bar{x}) = \int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x} - \bar{y}|} d\bar{x} - 2\pi u(\bar{x}),$$

koska $u(\bar{x}) := \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\partial\Omega} \psi(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\sigma(\bar{y})$. Tästä saadaan, että

$$u(\bar{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{x} + v(\bar{x}).$$

Näin ollen, koska pintaintegraalitermi

$$\int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{x} \tag{3}$$

on jatkuva $\mathbf{R}^2$:ssa, kuten tehtävän annossa mainittiin (perustellaan tätä myöhemmin), on

$$\begin{aligned}\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} u(\bar{x}) &= \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\Big(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{x}\Big) + \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} v(\bar{x}) \\ &= \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\Big(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{x}\Big) + 0,\end{aligned}$$

kun $\bar{x}_0 \in \partial\Omega$, sillä v häviää joukossa $\partial\Omega$.

Toisaalta jos $\bar{x} \in \mathbf{R}^2 \backslash \Omega$, saamme saman tyylisellä laskulla, että

$$u(\bar{x}) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{x} + 0 \cdot \frac{v(\bar{x})}{2\pi},$$

sillä sivun 57 kaavassa 9.13. $v(\bar{x})$:n kerroin $p(\bar{x}) = 0$, kun $\bar{x} \in \mathbf{R}^2 \backslash \Omega$. Näin saamme, että

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} u(\bar{x}) = \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0}\Big(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{x}\Big) + 0,$$

kun $\bar{x}_0 \in \partial\Omega$.

Koska raja-arvo reunapisteissä on sama riippumatta siitä lähestytäänkö pistettä alueen Ω sisä- tai ulkopuolelta on u jatkuva myös joukossa $\partial\Omega$ ja siten koko $\mathbf{R}^2$:ssa.

Esitetään vielä lopuksi perustelu sille, miksi pintaintegraalitermi (3) on jatkuva $\mathbf{R}^2$:ssa. Tämä seuraa luentomonisteen lemmasta 8.4., joka sanoo, että funktio

$$\phi(\bar{x}) = \int\limits_{U} \rho(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{y}$$

on jatkuvasti derivoituva (ja siten jatkuva) rajoitetussa, yhdesti yhtenäisessä ja riittävän sileä reunaisessa alueessa $U \subset \mathbf{R}^2$, kun ρ on mitallinen funktio. (Merkitsen tässä integrointialuetta U:lla, koska lemmassa 8.4. käytetty Ω on meillä jo muussa käytössä.)

Sovellamme tätä tapauksessa, jossa $\rho(\bar{y}) = \Delta v(\bar{y})$, kun $\bar{y} \in \Omega$ ja $\rho(\bar{y}) = 0$ muulloin. Tällöin ρ on mitallinen, koska $v \in C^2(\mathbf{R})$.

Olkoon nyt $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$ mielivaltainen, valitaan $U = B(\bar{0}, R)$, missä $R > 0$ on niin suuri, että $\bar{x} \in B(\bar{0}, R)$. Nyt funktio

$$\begin{aligned}\int\limits_{U} \rho(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{y} &= \int\limits_{B(\bar{0},R)} \rho(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{y} \\ &= \int\limits_{\Omega} \Delta v(\bar{y}) \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{x} + \int\limits_{U\backslash\Omega} 0 \cdot \log \frac{1}{|\bar{x}-\bar{y}|} d\bar{x}\end{aligned}$$

jatkuva U:ssa, mistä (3):n jatkuvuus seuraa, koska viimeinen integraali häviää, $\bar{x} \in \mathbf{R}^2$ on valittu mielivaltaisesti ja U on sen ympäristö.

Funktion v konstruktion idea:
Olkoon $B_r = \{\bar{x} \in \mathbf{R}^2 : \text{dist}(\bar{x}, \partial\Omega) < r\}$, missä $\text{dist}(\bar{x}, \partial\Omega) := \inf_{\bar{y} \in \partial\Omega} d(\bar{x}, \bar{y})$. Valitaan luku $\delta > 0$ niin pieneksi, että yhtälöllä $d(\bar{x}, \partial\Omega) = \text{dist}(\bar{x}, \bar{y})$ on yksikäsitteinen ratkaisu $\bar{y}$ joukossa B_δ (tämä on mahdollista, koska Ω on rajoitettu C^2-reunainen alue).

Olkoon nyt $\zeta(t) : \mathbf{R} \to [0,1]$ sellainen C^2-funktio, joka saa välillä $[-\delta/2, \delta/2]$ arvon 1 ja joukossa $\mathbf{R} \setminus (-\delta, \delta)$ arvon 0. Valitaan halutuksi funktioksi funktio

$$v(\bar{x}) = \begin{cases} \zeta\big(\widehat{\text{dist}}(\bar{x}, \partial\Omega)\big)\Big(\psi(\bar{y})\widehat{\text{dist}}(\bar{x}, \partial\Omega)\Big), & \text{kun} \quad \bar{x} \in B_\delta, \\ 0, & \text{muulloin,} \end{cases}$$

missä $\bar{y}$ on se piste, jolla $d(\bar{x}, \bar{y}) = \text{dist}(\bar{x}, \partial\Omega)$ ja $\widehat{\text{dist}}(\bar{x}, \partial\Omega)$ on suunnistettu etäisyys reunasta, joka joukossa $B_\delta \cap \Omega$ saa arvon $-\text{dist}(\bar{x}, \partial\Omega)$ ja joukossa $B_\delta \cap (\mathbf{R}^2 \setminus \Omega)$ arvon $\text{dist}(\bar{x}, \partial\Omega)$.

Nyt vektori $(\bar{x} - \bar{y})$ on normaalivektorin $\bar{\nu}(\bar{y})$ kanssa yhdensuuntainen ja

$$v(\bar{x}) = \psi(\bar{y})(\bar{x} - \bar{y}) \cdot \bar{\nu}(\bar{y}), \quad \text{kun} \quad \bar{x} \in B_{\delta/2}$$

ja $\bar{y}$ on edelleen se piste, jossa $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(\bar{x}, \partial\Omega)$.

Tästä nähdään, että

$$\partial_{\bar{\nu}(\bar{y})} v(\bar{y}) = \psi(\bar{y})$$

ja

$$v(\bar{y}) = (\bar{y} - \bar{y}) \cdot \bar{\nu}(\bar{y}) = 0,$$

kun $\bar{y} \in \partial\Omega$.

Se, että v on C^2-funktio on seurausta siitä, että funktiot ζ ja $\text{dist}(\bar{x}, \partial\Omega)$ ovat C^2-funktioita; ensimmäinen $\mathbf{R}$:ssä ja jälkimmäinen joukossa B_δ.

Mikä on puolestaan on seuraus siitä, että alue Ω on C^2-reunainen. Tämä on käytännössä osoitettu kirjassa Elliptic Partial Differential Equations of Second Order; D. Gilbarg, N.S. Trudinger (Appendix, sivu 381 alkaen).

(Yllä olevaa ei kannata opetella koetta varten.)